

• 수학 영역 •

정답

1	④	2	③	3	④	4	⑤	5	⑤
6	③	7	①	8	①	9	③	10	②
11	②	12	①	13	③	14	②	15	①
16	③	17	④	18	②	19	⑤	20	②
21	⑤	22	12	23	18	24	3	25	6
26	7	27	25	28	10	29	13	30	31

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$$1+2i+i(1-i)=1+2i+i+1=2+3i$$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$$\begin{aligned}A-2B &= 4x^2+2x-1-2(x^2+x-3) \\ &= 4x^2+2x-1-2x^2-2x+6=2x^2+5\end{aligned}$$

3. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 계산하기

$$P(x)=x^3+x^2+x+1 \text{ 이라 하자.}$$

$P(x)$ 를 $2x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{15}{8} \text{ 이다.}$$

따라서 나머지는 $\frac{15}{8}$ 이다.

4. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가 $-4 < x < 3$ 인 이차부등식은 $(x+4)(x-3) < 0$ 이다.

$$x^2+x-12 < 0 \text{ 이므로 } a=1, b=-12 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a-b=1-(-12)=13 \text{ 이다.}$$

5. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-2| < 5$ 를 풀면

$$-5 < x-2 < 5, \quad -3 < x < 7 \text{ 이다.}$$

부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ 이다.}$$

따라서 모든 정수 x 의 개수는 9이다.

[다른 풀이]

(i) $x < 2$ 인 경우

$$-x+2 < 5 \text{ 이므로 } x > -3 \text{ 이다.}$$

따라서 $-3 < x < 2$ 이다.

(ii) $x \geq 2$ 인 경우

$$x-2 < 5 \text{ 이므로 } x < 7 \text{ 이다.}$$

따라서 $2 \leq x < 7$ 이다.

(i), (ii)에 의해 $-3 < x < 7$ 이므로 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ 이다.}$$

따라서 모든 정수 x 의 개수는 9이다.

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

101을 x 라 하면

$$101^3-3 \times 101^2+3 \times 101-1=x^3-3x^2+3x-1$$

$$=(x-1)^3=(101-1)^3=100^3 \text{ 이다.}$$

따라서 주어진 식의 값은 $100^3=10^6$ 이다.

7. [출제의도] 방정식을 활용하여 실생활 문제 해결하기

올해 늘어난 \square 모양의 밭의 넓이가 500이므로
올해 밭의 총넓이는 $10 \times 10 + 500 = 600$ 이다. 올해
밭의 총넓이에 관한 식을 세우면

$$(10+x)(10+x-10)=600 \text{ 이고}$$

$$x^2+10x-600=0, \quad (x+30)(x-20)=0 \text{ 에서}$$

$$x=-30 \text{ 또는 } x=20 \text{ 이다.}$$

따라서 $x > 10$ 이므로 $x=20$ 이다.

8. [출제의도] 항등식을 활용하여 다항식의 나눗셈 추론하기

x 에 대한 항등식이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1-5+a+1=-1 \text{ 이고 } a=2 \text{ 이다.}$$

$$x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1 \text{ 에서}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$2^3-5 \times 2^2+2 \times 2+1=(2-1) \times Q(2)-1 \text{ 이고}$$

$$8-20+4+1=Q(2)-1 \text{ 이다.}$$

따라서 $Q(2)=-6$ 이다.

9. [출제의도] 다항식의 곱셈공식을 이용하여 복소수 문제 해결하기

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4 &= x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 \\ &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

$$x=2+i, \quad y=2-i \text{ 에서 } x+y=4, \quad xy=5 \text{ 이므로}$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2=6^2-5^2=11 \\ &\text{ 이다.}\end{aligned}$$

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+2a+13$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로

이차방정식 $x^2+2(a-1)x+2a+13=0$ 의 판별식

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(2a+13)$$

$$=(a+2)(a-6) < 0$$

에서 $-2 < a < 6$ 이므로 정수 a 의 값은

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ 이다.}$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은 14이다.

11. [출제의도] 미정계수를 포함한 항등식 이해하기

주어진 방정식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0 \text{ 이다.}$$

$$-(p^2-2p+1)k+q+3=0 \text{ 이 실수 } k \text{에 대한 항등식}$$

$$\text{이므로 } p^2-2p+1=0, \quad q+3=0 \text{ 에서}$$

$$p=1, \quad q=-3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } p+q=-2 \text{ 이다.}$$

12. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 연립방정식 문제 해결하기

주어진 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+xy=8 & \cdots \cdots \text{㉠} \\ 2x+2y-xy=4 & \cdots \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

에서 두 식 ㉠과 ㉡을 더하면 $3(x+y)=12$,

$$x+y=4 \text{ 이고 ㉠에 대입하면 } xy=4 \text{ 이므로}$$

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=4 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2 \times 4=8$$

이다.

13. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

조립제법을 이용하면

2	1	2	-3	-10
		2	8	10
	1	4	5	0

에서 $x^3+2x^2-3x-10=(x-2)(x^2+4x+5)$ 이므로

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x-10=0$ 의 두 허근은 이차

방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 두 허근이고 $\alpha+\beta=-4$,

$$\alpha\beta=5 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= (-4)^3-3 \times 5 \times (-4) \\ &= -4\end{aligned}$$

이다.

14. [출제의도] 이차방정식 이해하기

x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식

$$\frac{D}{4}=k^2-(-k+20)=k^2+k-20=(k+5)(k-4) > 0$$

에서 $k < -5$ 또는 $k > 4$ 이고 k 는 자연수이므로 $k > 4 \cdots \cdots \text{㉠}$

두 근의 곱 $\alpha\beta=-k+20$ 이 양수이므로

$$k < 20 \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡에 의해 k 의 범위는 $4 < k < 20$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 5, 6, \cdots , 19이다.

따라서 모든 자연수 k 의 개수는 15이다.

15. [출제의도] 방정식과 부등식을 이용하여 다항식 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$$P(x)+2x+3=ax(x-1) \quad (a < 0)$$

$$\text{이므로 } P(x)=ax^2-(a+2)x-3 \text{ 이다.}$$

조건 (나)에 의하여 방정식

$$ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$$

가 중근을 가지므로

$$ax^2-(a+1)x-1=0 \text{ 의 판별식}$$

$$D=(a-1)^2-4a \times (-1)=(a+1)^2=0$$

에서 $a=-1$ 이다.

$$\text{따라서 } P(x)=-x^2-x-3 \text{ 에서 } P(-1)=-3 \text{ 이다.}$$

16. [출제의도] 이차함수를 이용하여 도형 문제 해결하기

$$\overline{PQ}=x \text{ 이므로 } \overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=1^2+x^2 \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2 &= (\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2) \\ &= 3x^2-2\sqrt{3}x+5 \\ &= 3\left(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right)+5 \\ &= 3\left(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+5 \\ &= 3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\end{aligned}$$

$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$ 은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 최솟값 4를 가진다.

$$\text{따라서 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad m=4 \text{ 이므로 } \frac{m}{a}=4\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

17. [출제의도] 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

x 에 대한 다항식 x^3+x^2+ax+b 가 $(x-1)^2$ 으로

나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

1	1	1	a	b
		1	2	$a+2$
1	1	2	$a+2$	$a+b+2$
		1	3	
	1	3	$a+5$	

$$a+b+2=0, \quad a+5=0 \text{ 이므로 } a=-5, \quad b=3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } Q(x)=x+3 \text{ 이므로}$$

$$Q(ab)=Q(-15)=-15+3=-12 \text{ 이다.}$$

18. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 부등식 문제 해결하기

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 10이고 $\overline{AB}=c$ 이므로

$$a+b=\boxed{10-c} \cdots \cdots \text{㉠}$$

이다. 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$$a^2+b^2=c^2 \text{ 에서 } (a+b)^2-2ab=c^2 \cdots \cdots \text{㉡}$$

이다. ㉠을 ㉡에 대입하면 $(10-c)^2 - 2ab = c^2$ 에서 $ab = \boxed{50-10c}$ 이다.

a, b 를 두 실근으로 가지고 이차항의 계수가 1인 x 에 대한 이차방정식은

$$x^2 - (\boxed{10-c})x + (\boxed{50-10c}) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

이고 ㉡의 판별식 $D \geq 0$ 이다.

빗변의 길이 c 는 양수이므로

부등식 $D \geq 0$ 의 해를 구하면

$$\begin{aligned} D &= (10-c)^2 - 4(50-10c) \\ &= c^2 + 20c - 100 \geq 0 \end{aligned}$$

에서 $c \leq -10 - 10\sqrt{2}$ 또는 $c \geq -10 + 10\sqrt{2}$ 이고 $c \geq \boxed{10(\sqrt{2}-1)}$ 이다.

㉡의 두 실근 a, b 는 모두 양수이므로

두 근의 합 $\boxed{10-c}$ 와 곱 $\boxed{50-10c}$ 는 모두 양수이다. 따라서 빗변의 길이 c 의 범위는

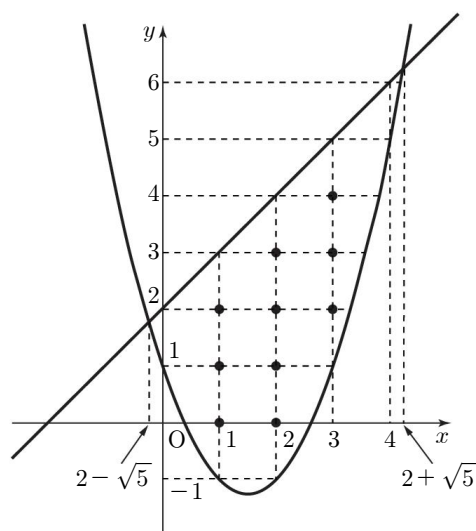
$$\boxed{10(\sqrt{2}-1)} \leq c < 5 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} f(c) &= 10-c, \quad g(c) = 50-10c, \quad k = 10(\sqrt{2}-1) \\ \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{25} \times f\left(\frac{9}{2}\right) \times g\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{10(\sqrt{2}-1)}{25} \times \left(10 - \frac{9}{2}\right) \times \left(50 - 10 \times \frac{9}{2}\right) \\ &= 11(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

이다.

19. [출제의도] 이차함수의 성질 이해하기



이차함수 $y = x^2 - 3x + 1$ 의 그래프와

직선 $y = x + 2$ 의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = x + 2$, $x^2 - 4x - 1 = 0$ 에서 $x = 2 \pm \sqrt{5}$ 이다.

이차함수 $y = x^2 - 3x + 1$ 의 그래프와

직선 $y = x + 2$ 로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점의 x 좌표를 p , y 좌표를 q 라 하면

$2 - \sqrt{5} < p < 2 + \sqrt{5}$ 이다. $-1 < 2 - \sqrt{5} < 0$ 이고

$4 < 2 + \sqrt{5} < 5$ 이므로 $2 - \sqrt{5} < p < 2 + \sqrt{5}$ 를 만족시키는 정수 p 의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 (p, q) 는 다음과 같다.

$p = 0$ 일 때, $1 < q < 2$ 이므로 존재하지 않는다.

$p = 1$ 일 때, $-1 < q < 3$ 이므로

(1, 0), (1, 1), (1, 2)이다.

$p = 2$ 일 때, $-1 < q < 4$ 이므로

(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)이다.

$p = 3$ 일 때, $1 < q < 5$ 이므로

(3, 2), (3, 3), (3, 4)이다.

$p = 4$ 일 때, $5 < q < 6$ 이므로 존재하지 않는다.

따라서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 10이다.

20. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여 다항식 문제 해결하기

$$\{P(x)+2\}^2 = (x-a)(x-2a)+4 = x^2 - 3ax + 2a^2 + 4 \text{이다.}$$

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3ax + 2a^2 + 4 = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식 $D = (3a)^2 - 4(2a^2 + 4) = 0$ 이다.

$$(3a)^2 - 4(2a^2 + 4) = 9a^2 - 8a^2 - 16 = a^2 - 16 = 0$$

이므로 $a = 4$ 또는 $a = -4$ 이다.

(i) $a = 4$ 인 경우

$$\{P(x)+2\}^2 = x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$$

이므로 $P(x)+2 = x-6$ 또는 $P(x)+2 = -x+6$

에서 $P(x) = x-8$ 또는 $P(x) = -x+4$ 이다.

(ii) $a = -4$ 인 경우

$$\{P(x)+2\}^2 = x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$

이므로 $P(x)+2 = x+6$ 또는 $P(x)+2 = -x-6$

에서 $P(x) = x+4$ 또는 $P(x) = -x-8$ 이다.

(i)과 (ii)에 의해 조건을 만족시키는 일차다항식 $P(x)$ 는 $x-8$, $-x+4$, $x+4$, $-x-8$ 이고 모든 $P(1)$ 의 값은 -7 , 3 , 5 , -9 이다.

따라서 모든 $P(1)$ 의 값의 합은

$$(-7) + 3 + 5 + (-9) = -8 \text{이다.}$$

[다른 풀이]

$$\{P(x)+2\}^2 = (x-a)(x-2a)+4 \text{에서}$$

다항식 $P(x)$ 는 일차식이다.

$P(x) = px + q$ ($p \neq 0$)라 하자.

$$(px+q+2)^2 = (x-a)(x-2a)+4 \text{에서}$$

$$p^2x^2 + (2pq+4p)x + q^2+4q+4 = x^2 - 3ax + 2a^2 + 4$$

$$\text{이므로 } p^2 = 1, \quad 2pq+4p = -3a, \quad q^2+4q+4 = 2a^2+4 \text{이다.}$$

(i) $p = 1$ 인 경우

$$2q+4 = -3a, \quad q^2+4q = 2a^2 \text{에서 } (q-4)(q+8) = 0 \text{이므로 } q = 4 \text{ 또는 } q = -8 \text{이다.}$$

따라서 $P(x) = x+4$ 또는 $P(x) = x-8$ 이다.

(ii) $p = -1$ 인 경우

$$-2q-4 = -3a, \quad q^2+4q = 2a^2 \text{에서 } (q-4)(q+8) = 0 \text{이므로 } q = 4 \text{ 또는 } q = -8 \text{이다.}$$

따라서 $P(x) = -x+4$ 또는 $P(x) = -x-8$ 이다.

그러므로 $P(x)$ 는 $x+4$, $x-8$, $-x+4$, $-x-8$ 이고 모든 $P(1)$ 의 값은 5 , -7 , 3 , -9 이다.

따라서 모든 $P(1)$ 의 값의 합은

$$5 + (-7) + 3 + (-9) = -8 \text{이다.}$$

21. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

$$\neg. a = \frac{3}{2} \text{일 때, } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + b \text{이고 } x = \frac{3}{2} \text{에}$$

서 최솟값 5를 가지므로 $f\left(\frac{3}{2}\right) = b = 5$ 이다. (참)

$$\neg. a \leq 1 \text{일 때, } f(x) \text{는 } x=1 \text{에서 최솟값을 가지므로 } f(1) = (1-a)^2 + b = 5 \text{이고 } b = -a^2 + 2a + 4 \text{이다. (참)}$$

ㄷ.

(i) $a \leq 1$ 인 경우

$$\neg \text{에서 } b = -a^2 + 2a + 4 \text{이므로}$$

$$a+b = -a^2 + 3a + 4 = -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \text{이다.}$$

따라서 $a+b$ 는 $a=1$ 에서 최댓값 6을 가진다.

(ii) $1 < a \leq 2$ 인 경우

$f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 $b=5$ 이므로

$$6 < a+b \leq 7 \text{이고 } a+b \text{는 } a=2 \text{에서 최댓값 7을 가진다.}$$

(iii) $a > 2$ 인 경우

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값을 가지고

$$f(2) = (2-a)^2 + b = 5, \quad b = -a^2 + 4a + 1 \text{에서}$$

$$a+b = -a^2 + 5a + 1 = -\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4} \text{이므로 } a+b$$

는 $a = \frac{5}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{29}{4}$ 를 가진다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $a+b$ 의 최댓값은 $\frac{29}{4}$ 이다. (참)

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$$(x+2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 \text{이므로 } xy^2 \text{의 계수는 12이다.}$$

23. [출제의도] 복소수 계산하기

$$(3+ai)(2-i) = (6+a) + (2a-3)i = 13+bi \text{에서}$$

$$6+a=13, \quad 2a-3=b \text{이므로 } a=7, \quad b=11 \text{이다.}$$

따라서 $a+b=18$ 이다.

24. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\text{연립방정식 } \begin{cases} x-y=-5 & \cdots \cdots \textcircled{A} \\ 4x^2+y^2=20 & \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

에서 ㉠을 y 에 대해 정리하면 $y = x+5$ 이다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4x^2 + (x+5)^2 = 20, \quad 5x^2 + 10x + 5 = 0 \text{에서 } x = -1$$

이고 ㉠에 대입하면 $y = 4$ 이다.

$$\text{따라서 } \alpha + \beta = (-1) + 4 = 3 \text{이다.}$$

25. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

α, β 는 이차방정식 $x^2 - 3x + k = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 - 3\alpha + k = 0, \quad \beta^2 - 3\beta + k = 0 \text{에서}$$

$$\alpha^2 - \alpha + k = 2\alpha, \quad \beta^2 - \beta + k = 2\beta \text{이고}$$

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = k \text{이다. 따라서}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2 - \alpha + k} + \frac{1}{\beta^2 - \beta + k} &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} = \frac{3}{2k} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이므로 $k = 6$ 이다.

26. [출제의도] 사차방정식 이해하기

주어진 사차방정식은 $x = \alpha$ 를 근으로 가지면

$x = -\alpha$ 도 근으로 가지므로 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 가짐을 알 수 있고 서로 다른 네 실근을

$$\alpha, \beta, -\beta (= \gamma), -\alpha (= \delta) \quad (\alpha < \beta < 0)$$

으로 둘 수 있다.

$x^2 = X$ 라 하면 주어진 사차방정식은

$$X^2 - (2\alpha - 9)X + 4 = 0 \text{이고 두 근은 } \alpha^2, \beta^2 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha - 9 = 5 \text{이므로 } a = 7 \text{이다.}$$

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

$$(1-i)^{2n} = \{(1-i)^2\}^n = (-2i)^n = 2^n (-i)^n$$

이므로 $2^n (-i)^n = 2^n i$ 에서 $(-i)^n = i$ 를 만족시키는 $n = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 24$)이다.

따라서 100 이하의 모든 자연수 n 의 개수는 25이다.

28. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

연립부등식

$$\begin{cases} x^2 - (a^2-3)x - 3a^2 < 0 & \cdots \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + (a-9)x - 9a > 0 & \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

에서 이차부등식 ㉠의 해는

$$x^2 - (a^2-3)x - 3a^2 = (x-a^2)(x+3) < 0$$

이고 $-3 < x < a^2$ 이다.

$a > 2$ 이므로 이차부등식 ㉡의 해는

$$x^2 + (a-9)x - 9a = (x+a)(x-9) > 0$$

이고 $x > 9$ 또는 $x < -a$ 이다.

$a^2 > 10$ 이면 연립부등식의 해에 $x = 10$ 이 포함되므로 정수 x 가 존재한다. 그러므로 정수 x 가 존재하지 않기 위한 a 의 범위는 $a^2 \leq 10$ 에서

$$2 < a \leq \sqrt{10} \text{이다. 따라서 } a \text{의 최댓값 } M = \sqrt{10}$$

이므로 $M^2 = 10$ 이다.

29. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기

(가)에서 $Q(1)=0$ 인 경우와 $Q(1)\neq 0$ 인 경우로 나눌 수 있다.

(i) $Q(1)=0$ 인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ ($a\neq 0$)라 하면 (나)에 의해

$$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2 \\ =x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$$

이고 (가)에 의해

$$x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2 \text{ 이 } x^2-3x+3 \text{ 으로 나누어떨어져야 하므로}$$

$$x^2-3x+3 \overline{) x^3 - a^2x^2 + (2a^2-10)x + 13 - a^2} \\ \underline{x^3 - 3x^2 + 3x} \\ (-a^2+3)x^2 + (2a^2-13)x + 13 - a^2 \\ \underline{(-a^2+3)x^2 - 3(-a^2+3)x + 3(-a^2+3)} \\ (-a^2-4)x + 4 + 2a^2$$

에서 $(-a^2-4)x+4+2a^2=0$ 을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $Q(1)\neq 0$ 인 경우

$P(x)$ 는 x^2-3x+3 과 $x-1$ 을 인수로 가지고 (나)에 의해 $x^3-2x+1-P(x)$ 는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다.

$$P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$$

이고, (나)에 의해

$$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x) \\ =x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)=4x^2-16x+16 \text{ 이다.}$$

$$\{Q(x)\}^2=(2x-4)^2 \text{ 이므로 } Q(x)=2x-4 \text{ 또는 } Q(x)=-2x+4 \text{ 이고 } Q(0)<0 \text{ 에서 } Q(x)=2x-4 \text{ 이다. 따라서 } P(2)+Q(8)=13 \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

(i) $Q(1)=0$ 인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ ($a\neq 0$)라 하면 (나)에 의해

$$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2 \\ =x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. (나)에 의해 $x^3-2x+1-P(x)$ 는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고 이차식 x^2-3x+3 과 일차식 $x-k$ 를 인수로 가지므로

$$P(x)=(x^2-3x+3)(x-k) \\ =x^3+(-k-3)x^2+(3k+3)x-3k \dots\dots \textcircled{2}$$

이다. $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에 의하여 $-a^2=-k-3$,

$$2a^2-10=3k+3, 13-a^2=-3k \text{ 를 만족시키는 } a \text{ 와 } k \text{ 는 존재하지 않는다.}$$

30. [출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기

(가)에 의해 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 대칭축은 각각 $x=0$ 으로 같고 (나)에 의해 $f(0)$ 이 정수이므로 $g(0)$ 도 정수이다.

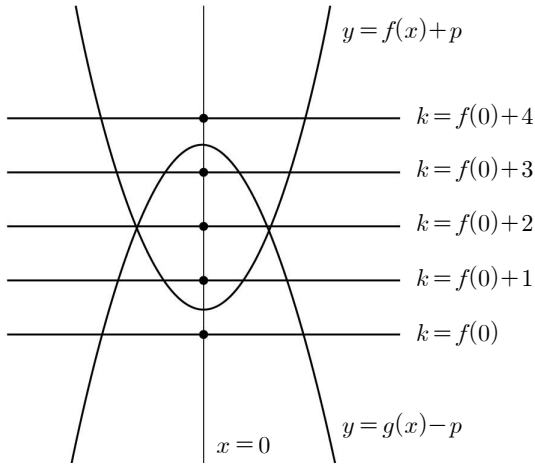
(i) $0\leq p<1$ 인 경우

$$k=f(0)+1, f(0)+2, f(0)+3 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2 로 같고

$$k\leq f(0), k\geq f(0)+4 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



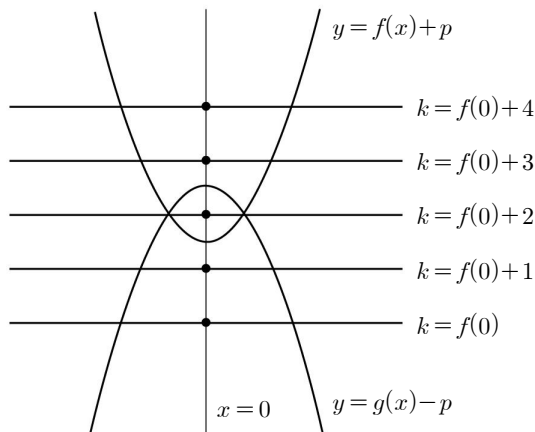
(ii) $1\leq p<2$ 인 경우

$$k=f(0)+2 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2 로 같고

$$k\leq f(0)+1, k\geq f(0)+3 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



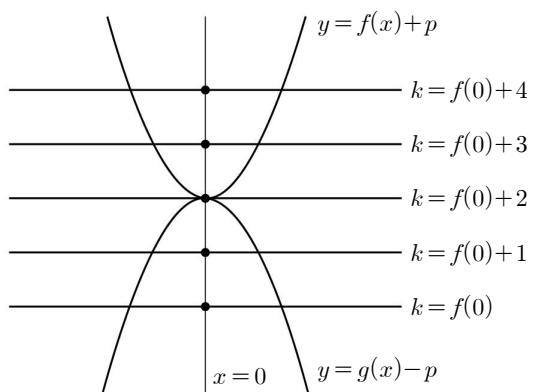
(iii) $p=2$ 인 경우

$$k=f(0)+2 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 1 로 같고

$$k\neq f(0)+2 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



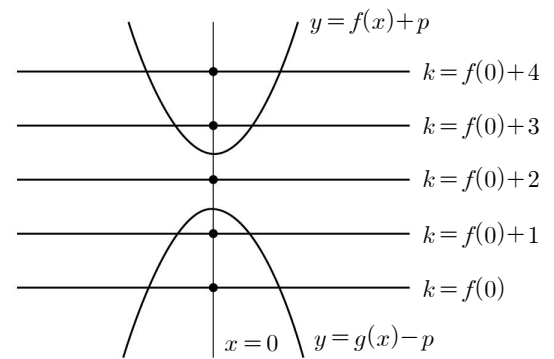
(iv) $2< p\leq 3$ 인 경우

$$k=f(0)+2 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 0 으로 같고

$$k\neq f(0)+2 \text{ 일 때,}$$

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



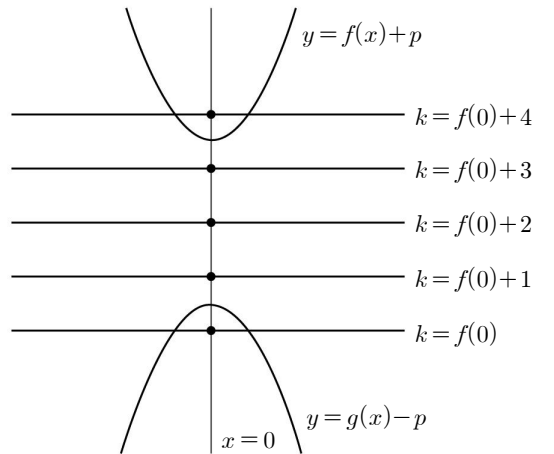
(v) $p>3$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $g(x)-p<f(x)+p$ 이므로

$g(0)-p<f(0)+p$ 인 정수 k 에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 같다.

이때 정수 k 의 개수는 3 이상이다.



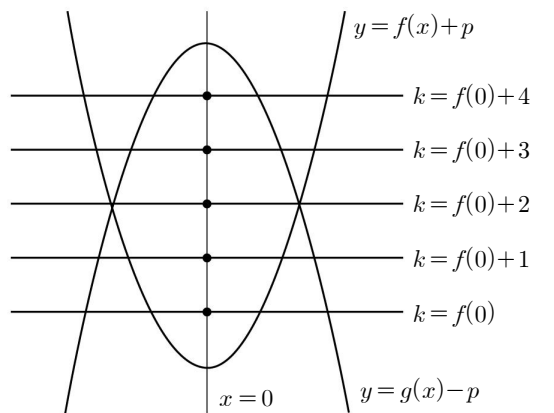
(vi) $p<0$ 인 경우

$$g(0)-p-\{f(0)+p\}>4 \text{ 이므로}$$

$f(0)+p<g(0)-p$ 인 정수 k 에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 같다.

이때 정수 k 의 개수는 5 이상이다.



(i) ~ (vi)에 의해

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 같게 되도록 하는 정수 k 의 개수가

1 일 때, 모든 실수 p 의 범위는 $1\leq p\leq 3$ 이므로

실수 p 의 최솟값은 1, 최댓값은 3 이다.

따라서 $m+10M=1+30=31$ 이다.