

• 수학 영역 •

정답

1	⑤	2	①	3	④	4	⑤	5	③
6	④	7	③	8	①	9	③	10	④
11	②	12	②	13	③	14	①	15	②
16	③	17	②	18	⑤	19	④	20	①
21	⑤	22	6	23	16	24	7	25	14
26	23	27	21	28	91	29	94	30	120

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$$i(1-i) = i - i^2 = 1 + i$$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A+B = (2x^2-4x+3) + (-x^2+9x+6) \\ = x^2+5x+9$$

3. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + a \text{ 라 하면} \\ P(x) \text{ 가 } x-3 \text{ 으로 나누어떨어지므로} \\ \text{나머지정리에 의해} \\ P(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + a = 0 \\ \text{따라서 } a = 15 \text{ 이다.}$$

4. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$$\text{등식 } x^2+ax-3 = x(x+2)+b \text{ 가 } x \text{ 에 대한 항등식} \\ \text{이므로 } x^2+ax-3 = x^2+2x+b \text{ 에서 } a=2, b=-3 \\ \text{따라서 } a+b=-1 \text{ 이다.}$$

5. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기

$$\text{부등식 } |2x-3| < 5 \text{ 를 풀면} \\ -5 < 2x-3 < 5 \text{ 이므로 } -1 < x < 4 \\ \text{따라서 } a=-1, b=4 \text{ 이므로 } a+b=3 \text{ 이다.}$$

6. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

$$\text{이차함수 } y = x^2+5x+9 \text{ 의 그래프와} \\ \text{직선 } y = x+k \text{ 가 만나지 않도록 하려면} \\ x^2+5x+9 = x+k \text{ 에서} \\ \text{이차방정식 } x^2+4x+9-k=0 \text{ 의 판별식} \\ D = 4^2 - 4(9-k) = 4k - 20 < 0 \\ k < 5 \text{ 이므로 자연수 } k \text{ 는 } 1, 2, 3, 4 \\ \text{따라서 자연수 } k \text{ 의 개수는 } 4 \text{ 이다.}$$

7. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$$a = 2023 \text{ 이라 하면} \\ \frac{2022 \times (2023^2 + 2024)}{2024 \times 2023 + 1} = \frac{(a-1) \times (a^2+a+1)}{(a+1) \times a + 1} \\ = \frac{(a-1) \times (a^2+a+1)}{a^2+a+1} = a-1 \\ = 2023-1 = 2022$$

8. [출제의도] 인수분해 계산하기

$$x^3y+xy^3-x^2-y^2 \\ = xy(x^2+y^2) - (x^2+y^2) \\ = (xy-1)(x^2+y^2) \\ x=1-2i, y=1+2i \text{ 에서 } x+y=2, xy=5 \text{ 이므로} \\ x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 5 = -6 \\ \text{따라서 } x^3y+xy^3-x^2-y^2 = (5-1) \times (-6) = -24 \\ \text{이다.}$$

9. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 연립방정식 문제 해결하기

$$\text{연립방정식} \\ \begin{cases} 4x^2-y^2=27 \cdots \textcircled{1} \\ 2x+y=3 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \\ \text{에서 } \textcircled{1} \text{ 과 } \textcircled{2} \text{ 에 의해} \\ 4x^2-y^2 = (2x+y)(2x-y) = 3(2x-y) = 27 \\ \text{이므로 } 2x-y=9 \cdots \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \text{ 과 } \textcircled{3} \text{ 을 더하면 } 4x=12, x=3 \text{ 이고} \\ x=3 \text{ 을 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } y=-3 \text{ 이므로} \\ \alpha=3, \beta=-3 \\ \text{따라서 } \alpha-\beta=6 \text{ 이다.}$$

10. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$$\text{이차방정식 } 2x^2+ax+b=0 \text{ 의 한 근이 } 2-i \text{ 이므로} \\ x \text{ 에 } 2-i \text{ 를 대입하면} \\ 2(2-i)^2+a(2-i)+b = (2a+b+6)-(8+a)i=0 \\ 2a+b+6=0, 8+a=0 \\ \text{따라서 } a=-8, b=10 \text{ 이므로 } b-a=18 \text{ 이다.}$$

11. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$$\text{두 상수 } a, b \text{ 에 대해 } P(x) = x^2+ax+b \text{ 라 하자.} \\ \text{조건 (가)에서 나머지정리에 의해 } P(1)=1 \text{ 이므로} \\ a+b=0 \cdots \textcircled{1} \\ \text{조건 (나)에서 나머지정리에 의해} \\ 2P(2)=2, P(2)=1 \text{ 이므로} \\ 2a+b=-3 \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 연립하면 } a=-3, b=3 \\ \text{따라서 } P(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 3 = 7 \text{ 이다.}$$

12. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

$$\text{조립제법을 이용하면} \\ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -(2a+1) & (a+1)^2 & -(a^2+1) & \\ & & 1 & -2a & a^2+1 & \\ & 1 & -2a & a^2+1 & 0 & \end{array}$$

$$\text{에서} \\ x^3 - (2a+1)x^2 + (a+1)^2x - (a^2+1) \\ = (x-1)(x^2-2ax+a^2+1) \text{ 이고} \\ \text{이차방정식 } x^2-2ax+a^2+1=0 \text{ 의} \\ \text{판별식 } D = 4a^2 - 4(a^2+1) = -4 < 0 \text{ 이므로} \\ \text{삼차방정식 } x^3 - (2a+1)x^2 + (a+1)^2x - (a^2+1)=0 \\ \text{의 서로 다른 두 허근 } \alpha, \beta \text{ 는} \\ \text{이차방정식 } x^2-2ax+a^2+1=0 \text{ 의} \\ \text{서로 다른 두 허근과 같다.} \\ \text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해} \\ \alpha+\beta=2a=8 \text{ 이므로 } a=4 \\ \text{따라서 } \alpha\beta=a^2+1=17 \text{ 이다.}$$

13. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$$x^5+ax^2+(a+1)x+2 = (x-1)Q(x)+6 \cdots \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \text{ 에 } x=1 \text{ 을 대입하면} \\ 1+a+(a+1)+2=6 \text{ 이므로 } a=1 \\ x^5+x^2+2x+2 = (x-1)Q(x)+6 \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{2} \text{ 에 } x=2 \text{ 를 대입하면} \\ 32+4+4+2 = Q(2)+6 \text{ 이므로 } Q(2)=36 \\ \text{따라서 } a+Q(2)=37 \text{ 이다.}$$

14. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 실생활 문제 해결하기

$$\text{절대 온도가 } T^\circ\text{인 이상 기체가 담긴 두 강철 용기} \\ A, B \text{ 에 대하여 각 강철 용기에 담긴 이상 기체의} \\ \text{물질을 각각 } n_A, n_B \text{ 라 하고, 압력을 각각 } P_A, P_B \\ \text{라 하자.}$$

$$n_A = \frac{1}{4}n_B, P_A = \frac{3}{2}P_B \text{ 이므로} \\ V_A = R \left( \frac{n_A T}{P_A} \right) = R \left( \frac{\frac{1}{4}n_B T}{\frac{3}{2}P_B} \right) = \frac{1}{6}R \left( \frac{n_B T}{P_B} \right) = \frac{1}{6}V_B \\ \text{따라서 } \frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

15. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

$$\text{두 점 } P, Q \text{ 는 각각} \\ P(t, 2t^2+1), Q(t, -(t-3)^2+1) \text{ 이므로} \\ \overline{PQ} = 2t^2 + (t-3)^2 = 3t^2 - 6t + 9 \\ \overline{AB} = 3 \text{ 이고 } \overline{AB} \perp \overline{PQ} \text{ 이므로 사각형 } PAQB \text{ 의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PQ} = \frac{3}{2}(3t^2 - 6t + 9) \text{ 이다.} \\ \text{사각형 } PAQB \text{ 의 넓이를 } S(t) \text{ 라 하면} \\ 0 < t < 3 \text{ 에서 } S(t) = \frac{3}{2}(3t^2 - 6t + 9) = \frac{9}{2}(t-1)^2 + 9 \\ S(t) \text{ 는 } t=1 \text{ 일 때 최솟값 } 9 \text{ 를 갖는다.} \\ \text{따라서 사각형 } PAQB \text{ 의 넓이의 최솟값은 } 9 \text{ 이다.}$$

16. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$$(i) 1 \text{ 이 } x \text{ 에 대한 방정식 } x-a=0 \text{ 의 근일 경우} \\ a=1 \text{ 이므로 주어진 방정식은} \\ (x-1)(x^2-2x+4)=0 \text{ 이고} \\ \text{방정식 } x^2-2x+4=0 \text{ 의 판별식} \\ D = 4 - 16 = -12 < 0 \\ \text{그러므로 방정식 } (x-1)(x^2-2x+4)=0 \text{ 은} \\ \text{서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.} \\ (ii) 1 \text{ 이 } x \text{ 에 대한 방정식 } x^2+(1-3a)x+4=0 \text{ 의} \\ \text{근일 경우} \\ 1+(1-3a)+4=0 \text{ 에서 } a=2 \text{ 이므로 주어진 방정식은} \\ (x-2)(x^2-5x+4)=0 \\ \text{방정식 } x^2-5x+4=0 \text{ 이 두 실근 } 1, 4 \text{ 를 가지므로} \\ \text{방정식 } (x-2)(x^2-5x+4)=0 \text{ 은 서로 다른} \\ \text{세 실근 } 1, 2, 4 \text{ 를 갖는다.} \\ \text{따라서 (i), (ii)에 의해} \\ \alpha=2, \beta=4 \text{ (또는 } \alpha=4, \beta=2 \text{ )이므로} \\ \alpha\beta=8 \text{ 이다.}$$

17. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 이해하기

$$\text{이차함수 } y = ax^2 (a > 0) \text{ 의 그래프와} \\ \text{직선 } y = x+6 \text{ 이 만나는 점의 } x \text{ 좌표는 } ax^2 = x+6 \text{ 에서} \\ \text{이차방정식 } ax^2-x-6=0 \text{ 의 두 실근 } \alpha, \beta (\alpha < \beta) \text{ 와} \\ \text{같은으로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해} \\ \alpha+\beta = \frac{1}{a}, \alpha\beta = -\frac{6}{a} \\ \text{한편, } \overline{CA} = \beta-\alpha \text{ 이고 직선 } y = x+6 \text{ 의 기울기가} \\ 1 \text{ 이므로 } \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BC}}{\beta-\alpha} = 1 \text{ 에서 } \beta-\alpha = \overline{BC} = \frac{7}{2} \\ (\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로} \\ \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{6}{a}\right) \\ \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{24}{a} - \frac{49}{4} = 0 \text{ 이므로 } 49a^2 - 96a - 4 = 0 \text{ 에서} \\ (49a+2)(a-2)=0 \\ a > 0 \text{ 이므로 } a=2 \\ \text{따라서 } \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{6}{2}\right) \\ = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4} \\ \text{이다.}$$

18. [출제의도] 사차방정식 이해하기

$x^2 = X$ 라 하면 주어진 방정식  $P(x) = 0$  은  
 $4X^2 - 4(n+2)X + (n-2)^2 = 0$  이고  
 근의 공식에 의해  

$$X = \frac{4(n+2) \pm \sqrt{16(n+2)^2 - 16(n-2)^2}}{8}$$

$$= \frac{n+2 \pm \sqrt{8n}}{2}$$
 그러므로  $X = \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)^2$  또는  $X = \left(\sqrt{\frac{n}{2}} - 1\right)^2$   
 즉,  $x^2 = \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)^2$  또는  $x^2 = \left(\sqrt{\frac{n}{2}} - 1\right)^2$  에서  
 $x = \sqrt{\frac{n}{2}} + 1$  또는  $x = -\sqrt{\frac{n}{2}} - 1$  또는  
 $x = \sqrt{\frac{n}{2}} - 1$  또는  $x = -\sqrt{\frac{n}{2}} + 1$   
 방정식  $P(x) = 0$ 이 정수해를 갖기 위해서는  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  이  
 자연수가 되어야 한다.  
 자연수  $l$ 에 대하여  $n = 2l^2$  이어야 하므로  
 20 이하의 자연수  $n$ 의 값은 2, 8, 18  
 (i)  $n = 2$ 인 경우  
 $x = -2$  또는  $x = 0$  또는  $x = 2$   
 이므로 서로 다른 세 개의 정수해를 가진다.  
 (ii)  $n = 8$ 인 경우  
 $x = -3$  또는  $x = -1$  또는  $x = 1$  또는  $x = 3$   
 이므로 서로 다른 네 개의 정수해를 가진다.  
 (iii)  $n = 18$ 인 경우  
 $x = -4$  또는  $x = -2$  또는  $x = 2$  또는  $x = 4$   
 이므로 서로 다른 네 개의 정수해를 가진다.  
 (i), (ii), (iii)에 의해 방정식  $P(x) = 0$ 이  
 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의  
 모든  $n$ 의 값은  $\boxed{8}, \boxed{18}$ 이다.  
 따라서  $f(n) = 8n$ ,  $a = 8$ ,  $b = 18$ 이므로  
 $f(b-a) = f(10) = 80$ 이다.

19. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 도형 문제 해결하기

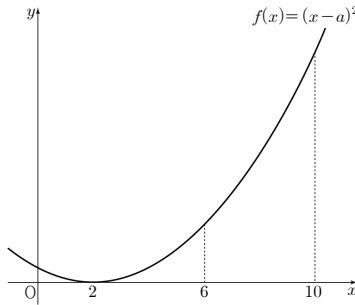
$\overline{CH} = 1$ ,  $\overline{BH} = x$  이고  
 삼각형 ABC의 넓이가  $\frac{4}{3}$ 이므로  $\overline{AB} = \frac{8}{3}$   
 직각삼각형 AHC와 직각삼각형 CHB는 닮음이므로  
 $\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{BH}$ 이다.  
 $\left(\frac{8}{3} - x\right) : 1 = 1 : x$ 이므로  $3x^2 - 8x + 3 = 0$   
 $0 < x < 1$ 이므로  $x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$ 이다.  
 한편, 다항식  $3t^3 - 5t^2 + 4t + 7$ 을  $3t^2 - 8t + 3$ 으로  
 나누었을 때의 몫은  $t+1$ , 나머지는  $9t+4$ 이므로  
 $3t^3 - 5t^2 + 4t + 7 = (3t^2 - 8t + 3)(t+1) + 9t+4$   
 따라서  
 $3x^3 - 5x^2 + 4x + 7 = (3x^2 - 8x + 3)(x+1) + 9x+4$   

$$= 9x+4 = 9 \times \frac{4 - \sqrt{7}}{3} + 4$$

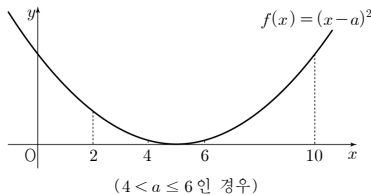
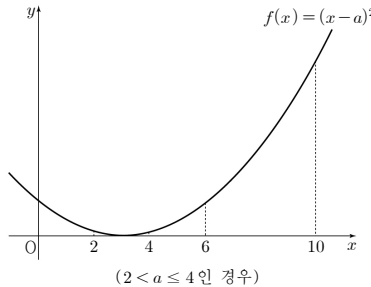
$$= 16 - 3\sqrt{7}$$
 이다.

20. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

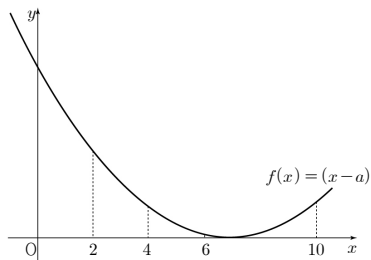
함수  $f(x) = (x-a)^2$ 이므로  
 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는  
 $(a, 0)$ 이고, 조건 (가)에 의해  $2 \leq a \leq 10$ 이다.  
 (i)  $a = 2$ 인 경우  
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값과  
 $6 \leq x \leq 10$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  
 $f(6)$ 으로 같으므로 조건 (나)를 만족시킨다.  
 그러므로  $f(-1) = (-1-2)^2 = 9$



(ii)  $2 < a \leq 6$ 인 경우  
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  
 $f(2)$  또는  $f(6)$ 이고  
 $6 \leq x \leq 10$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  
 $f(6)$ 이므로  
 조건 (나)에 의해  $f(2) \leq f(6)$ 이다.  
 $(2-a)^2 \leq (6-a)^2 \leq 0$ 에서  $a \leq 4$ 이므로  $2 < a \leq 4$   
 $f(-1) = (-1-a)^2$ 이므로  $9 < f(-1) \leq 25$



(iii)  $6 < a \leq 10$ 인 경우  
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  $f(2)$ 이고  
 $6 \leq x \leq 10$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은 0이다.  
 $f(2) > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



따라서 (i), (ii), (iii)에 의해  
 $9 \leq f(-1) \leq 25$ 이므로  $M+m = 25+9 = 34$ 이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

ㄱ. 방정식  $x^2 - 6x + 6 = 6$ 의 해는  
 $x = 0$  또는  $x = 6$ 이므로 점 C(0, 6), 점 D(6, 6)에서  
 $\overline{CD} = 6$ 이다. (참)  
 ㄴ. 방정식  $x^2 = k$ 의 해는  
 $x = \pm \sqrt{k}$ 이므로 점 A( $-\sqrt{k}$ , k), 점 B( $\sqrt{k}$ , k)  
 에서  $\overline{AB}^2 = 4k$

두 점 C, D의 x좌표를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면  
 방정식  $x^2 - 6x + 6 = k$ 에서  
 $\alpha + \beta = 6$ ,  $\alpha\beta = 6 - k$   
 $\overline{CD}^2 = (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 12 + 4k$   
 따라서  $\overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 = 12$ 로 일정하다. (참)  
 ㄷ.  $\overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 = (\overline{CD} + \overline{AB})(\overline{CD} - \overline{AB}) = 12$ 에서  
 $\overline{CD} + \overline{AB} = 4$ 이므로  $\overline{CD} - \overline{AB} = 3$   
 $\overline{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $\overline{CD} = \frac{7}{2}$ 이고,  
 $\overline{AB} = 2\sqrt{k} = \frac{1}{2}$ 에서  $k = \frac{1}{16}$ 이다.

점 B의 x좌표는  $\frac{1}{4}$ 이고,  
 방정식  $x^2 - 6x + 6 = \frac{1}{16}$ 에서  $16x^2 - 96x + 95 = 0$   
 이므로  $x = \frac{5}{4}$  또는  $x = \frac{19}{4}$ 이다.  
 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작으므로  
 점 C의 x좌표는  $\frac{5}{4}$ 이고  $\overline{BC} = 1$   
 따라서  $k + \overline{BC} = \frac{17}{16}$ 이다. (참)

22. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$(4x - y - 3z)^2 = 16x^2 + y^2 + 9z^2 - 8xy + 6yz - 24zx$   
 따라서  $yz$ 의 계수는 6이다.

23. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가  $-2 \leq x \leq 4$ 인  
 이차부등식은  $(x+2)(x-4) \leq 0$   
 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 이므로  $a = -2$ ,  $b = -8$   
 따라서  $ab = 16$ 이다.

24. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식  $x^3 + 2$ 를  $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의  
 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $ax+b$ 라 하면  
 $x^3 + 2 = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b$   
 $x = -1$ 을 대입하면  $-a + b = 1 \dots \textcircled{1}$   
 $x = 2$ 를 대입하면  $2a + b = 10 \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}$ 과  $\textcircled{2}$ 을 연립하면  $a = 3$ ,  $b = 4$ 이다.  
 따라서  $a + b = 7$ 이다.

25. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식  $x^2 - 6x + 11 = 0$ 에서  $x = 3 \pm \sqrt{2}i$ 이므로  
 $\alpha = 3 + \sqrt{2}i$ ,  $\beta = 3 - \sqrt{2}i$ 라 하면  
 $\beta$ 는  $\alpha$ 의 켤레복소수이다.  
 즉,  $\beta = \overline{\alpha}$ 이고  $\alpha = \overline{\beta}$ 이다.  
 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해  
 $\alpha + \beta = 6$ ,  $\alpha\beta = 11$ 이다.  
 따라서  $11 \left( \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} + \frac{\overline{\beta}}{\beta} \right) = 11 \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) = 11 \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \right)$   

$$= 11 \left( \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \right)$$

$$= 11 \times \frac{36 - 22}{11}$$

$$= 14$$

이다.

26. [출제의도] 나머지정리 문제 해결하기

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 11$   

$$= (x-3)(x^2 + x - 2) + 5$$
 다항식  $P(x)$ 을  $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는  
 $P(4)$ 이다.  
 따라서  $P(4) = 1 \times 18 + 5 = 23$ 이다.

27. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식과  
이차부등식을 이용하여 연립부등식 이해하기  
x에 대한 연립부등식

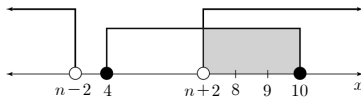
$$\begin{cases} |x-n| > 2 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - 14x + 40 \leq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

에서 부등식 ①의 해는  
 $x < n-2$  또는  $x > n+2$ 이다.

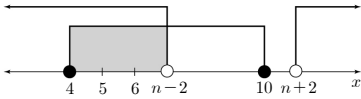
이차부등식 ②의 해는  
 $x^2 - 14x + 40 = (x-4)(x-10) \leq 0$ 에서  
 $4 \leq x \leq 10$ 이다.

(i)  $n \leq 5$  또는  $n \geq 9$ 인 경우

①  $n \leq 5$ 인 경우

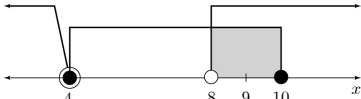


②  $n \geq 9$ 인 경우



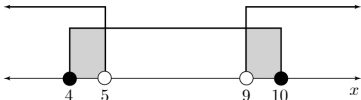
두 부등식 ①, ②를 동시에 만족시키는  
자연수 x의 개수는 3 이상이다.

(ii)  $n=6$ 인 경우



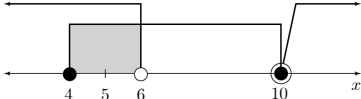
부등식 ①은  $|x-6| > 2$ 이므로 해는  
 $x < 4$  또는  $x > 8$ 이다. 두 부등식 ①, ②를  
동시에 만족시키는 자연수는 9, 10이다.

(iii)  $n=7$ 인 경우



부등식 ①은  $|x-7| > 2$ 이므로 해는  
 $x < 5$  또는  $x > 9$ 이다. 두 부등식 ①, ②를  
동시에 만족시키는 자연수는 4, 10이다.

(iv)  $n=8$ 인 경우



부등식 ①은  $|x-8| > 2$ 이므로 해는  
 $x < 6$  또는  $x > 10$ 이다. 두 부등식 ①, ②를  
동시에 만족시키는 자연수는 4, 5이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해  
자연수 n의 값은 6, 7, 8이므로  
모든 자연수 n의 값의 합은 21이다.

28. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를  
이용하여 문제 해결하기

이차함수  $y = x^2 - 4x + \frac{25}{4}$ 의 그래프와  
직선  $y = ax$ 와 한 점에서만 만나므로  
 $x^2 - 4x + \frac{25}{4} = ax$ 에서

이차방정식  $x^2 - (a+4)x + \frac{25}{4} = 0$ 의 판별식

$$D = (a+4)^2 - 4 \times 1 \times \frac{25}{4} = 0$$

$(a+4)^2 = 25$ 에서  $a > 0$ 이므로  $a = 1$

이차함수  $y = x^2 - 4x + \frac{25}{4}$ 의 그래프가

직선  $y = x$ 와 만나는 점의 x좌표는

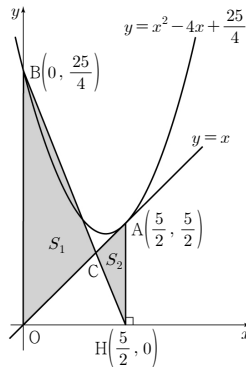
$$x^2 - 4x + \frac{25}{4} = x \text{에서}$$

이차방정식  $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$ 의 실근과 같으므로

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0 \text{에서 } x = \frac{5}{2} \text{이고,}$$

세 점 A, B, H는 각각

$$A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), B\left(0, \frac{25}{4}\right), H\left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{이다.}$$



한편, 삼각형 BOH의 넓이를  $T_1$ , 삼각형 AOH의  
넓이를  $T_2$ 라 할 때,  $T_1 - T_2 = S_1 - S_2$ 가 성립한다.

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= T_1 - T_2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{25}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{75}{16} \end{aligned}$$

따라서  $p = 16$ ,  $q = 75$ 이므로  $p+q = 91$ 이다.

29. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

49 이하의 자연수 m에 대하여  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$ 의  
값은 다음과 같다.

$$m=1, 9, 17, \dots, 49 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$m=2, 10, 18, \dots, 42 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = i$$

$$m=3, 11, 19, \dots, 43 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$m=4, 12, 20, \dots, 44 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = -1$$

$$m=5, 13, 21, \dots, 45 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$m=6, 14, 22, \dots, 46 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = -i$$

$$m=7, 15, 23, \dots, 47 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$m=8, 16, 24, \dots, 48 \text{일 때, } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = 1$$

49 이하의 자연수 n에 대하여  $i^n$ 의 값은 다음과  
같다.

$$n=1, 5, 9, \dots, 49 \text{일 때, } i^n = i$$

$$n=2, 6, 10, \dots, 46 \text{일 때, } i^n = -1$$

$$n=3, 7, 11, \dots, 47 \text{일 때, } i^n = -i$$

$$n=4, 8, 12, \dots, 48 \text{일 때, } i^n = 1$$

$$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n\right\}^2 = 4 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = 2 \text{ 또는 } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = -2$$

$$(i) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = 2 \text{인 경우}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = 1, i^n = -1 \text{이므로}$$

$m=48$ ,  $n=46$ 일 때  $m+n$ 의 최댓값 94를 갖는다.

$$(ii) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m - i^n = -2 \text{인 경우}$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m = -1, i^n = 1 \text{이므로}$$

$m=44$ ,  $n=48$ 일 때  $m+n$ 의 최댓값 92를 갖는다.

따라서 (i), (ii)에 의해  $m+n$ 의 최댓값은 94이다.

30. [출제의도] 부등식을 활용하여 이차함수의 그래프  
추론하기

조건 (가)에서  $f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ )

조건 (나)를 만족시키려면

$f(x) + g(x)$ 는 일차식이어야 하므로

$$g(x) = -ax^2 + bx + c \text{ (} b \neq 0 \text{)} \text{으로 나타낼 수 있다.}$$

$$f(x) + g(x) = bx + c \text{이고}$$

부등식  $bx + c \geq 0$ 의 해가  $x \geq 2$ 이므로

$$b > 0, -\frac{c}{b} = 2 \text{에서 } c = -2b$$

조건 (다)를 만족시키려면 함수

$$f(x) - g(x) = 2ax^2 - bx + 2b \text{가}$$

$x=1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$a > 0 \text{이고, } \frac{b}{4a} = 1 \text{에서 } b = 4a$$

$$\text{조건 (나)에서 } c = -2b \text{이므로 } c = -8a$$

$$\text{즉, } g(x) = -a(x^2 - 4x + 8) = -a(x-2)^2 - 4a$$

두 조건 (가), (나)에서  $f(x) + g(x) = 4a(x-2)$ 이다.

$$\text{방정식 } \{f(x) - k\} \times \{g(x) - k\} = 0 \text{이}$$

실근을 갖지 않기 위해서는

$$\text{방정식 } f(x) - k = 0 \text{은 실근을 갖지 않고,}$$

$$\text{방정식 } g(x) - k = 0 \text{도 실근을 갖지 않아야 한다.}$$

즉, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = k$ 가

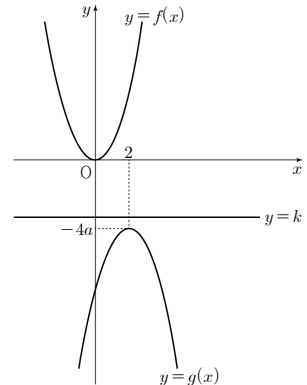
만나지 않고, 함수  $y = g(x)$ 의 그래프와 직선  $y = k$ 도

만나지 않으므로 직선  $y = k$ 는

두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프 사이에 있다.

그러므로 정수  $k$ 는 함수  $g(x)$ 의 최댓값인  $-4a$ 보다

크고, 함수  $f(x)$ 의 최솟값인 0보다 작다.



$-4a < k < 0$ 을 만족시키는 정수  $k$ 의 개수가 5이므로

$$-6 \leq -4a < -5 \text{에서 } \frac{5}{4} < a \leq \frac{3}{2}$$

따라서  $f(22) + g(22) = 4a(22-2) = 80a$ 이므로

$f(22) + g(22)$ 의 최댓값은 120이다.