

기하 정답

23	②	24	③	25	⑤	26	①	27	④
28	②	29	15	30	27				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 덧셈 계산하기

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + \vec{b} &= (4, 6) + (4, -2) \\ &= (4+4, 6+(-2)) \\ &= (8, 4) \end{aligned}$$

따라서 벡터  $2\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은 12

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점 중

제1사분면에 있는 점  $(a, b)$ 에서의

$$\text{접선의 방정식은 } \frac{ax}{32} + \frac{by}{8} = 1$$

접선이 점  $(8, 0)$ 을 지나므로  $\frac{8a}{32} = 1, a = 4$

점  $(4, b)$ 가 타원  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{16}{32} + \frac{b^2}{8} = 1, b^2 = 4$$

$b > 0$  이므로  $b = 2$

따라서  $a + b = 4 + 2 = 6$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

직선  $l$ 이 벡터  $\vec{u} = (3, -1)$ 에 평행하므로

직선  $l$ 의 방향벡터를  $\vec{u}$ 라 하자.

직선  $m$ 의 방향벡터를  $\vec{v}$ 라 하면  $\vec{v} = (7, 1)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

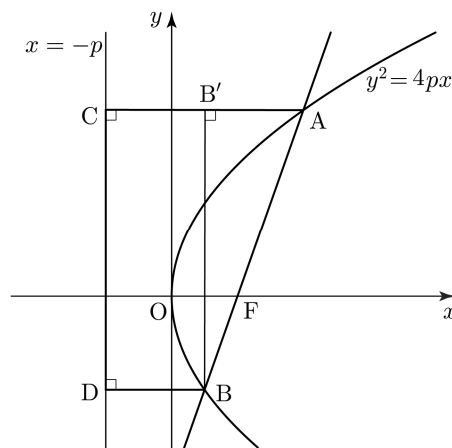
$$|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1) \cdot (7, 1) = 3 \times 7 + (-1) \times 1 = 20$$

따라서

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|20|}{\sqrt{10} \times \sqrt{50}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

26. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



$\overline{AC} = 2k, \overline{BD} = k (k > 0)$ 이라 하자.

포물선의 정의에 의하여  $\overline{AF} = \overline{AC}, \overline{BF} = \overline{BD}$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AC} + \overline{BD} = 2k + k = 3k$$

점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 B'이라 하자.

$$\overline{BB'} = \sqrt{(3k)^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k$$

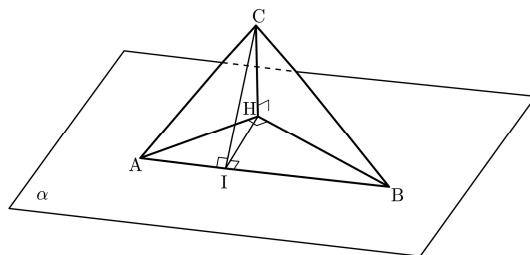
사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2k + k) \times 2\sqrt{2}k = 3\sqrt{2}k^2 = 12\sqrt{2}$$

$$k^2 = 4, k = 2$$

따라서 선분 AB의 길이는  $3k = 6$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기



$\overline{CH} = a (a > 0)$ 이라 하자.

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AC} = \sqrt{3}a, \overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AB} = \sqrt{6}a, \overline{BH} = \sqrt{(\sqrt{6}a)^2 - (\sqrt{2}a)^2} = 2a$$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{CH} \perp \alpha, \overline{CI} \perp \overline{AB}$$

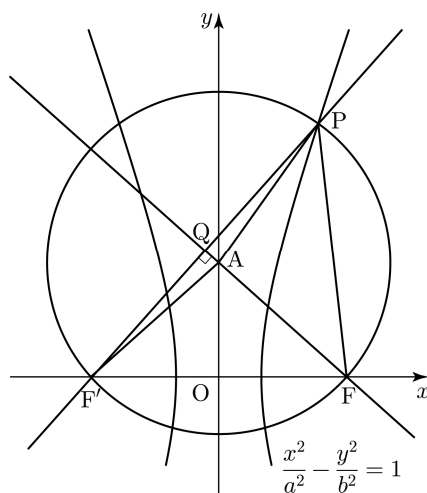
삼수선의 정리에 의하여  $\overline{HI} \perp \overline{AB}$

$$\text{직각삼각형 HBI에서 } \overline{HI} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overline{CI} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}a$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{CI}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{PF} = 3k, \overline{PF'} = 4k (k > 0)$ 이라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{PF'} - \overline{PF} = k = 2a$

$\overline{AF} = \overline{AF'}$ 이므로

삼각형 APF'은  $\overline{AP} = \overline{AF'}$ 인 이등변삼각형이고

$$\overline{QP} = \overline{QF'} = 4a$$

$$\overline{QF} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{QP}^2} = \sqrt{(3k)^2 - (4a)^2} = 2\sqrt{5}a$$

삼각형 FPF'에서 선분 FQ가 선분 PF'을

수직이등분하므로 삼각형 FPF'은

이등변삼각형이고  $\overline{FF'} = \overline{PF} = 6a$

$\overline{OF} = c = 3a$  (단, O는 원점)

$\angle AFF' = \theta$ 라 하면 직각삼각형 QFF'에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{QF'}}{\overline{QF}} = \frac{4a}{2\sqrt{5}a} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

직각삼각형 OFA에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{6}{c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{a}, a = \sqrt{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9a^2, b^2 = 8a^2$$

따라서  $b^2 - a^2 = 7a^2 = 35$

29. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 추론하기

두 점 C, D는 원 위의 점이므로

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}, \angle ADB = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AC}|^2 = 27 \text{에서 } \overline{AC} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = |\overline{AD}|^2 = 9 \text{에서 } \overline{AD} = 3$$

그러므로  $\overline{BC} = 3, \overline{BD} = 3\sqrt{3}$

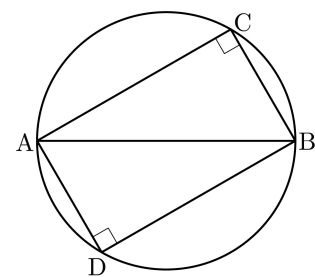
$\overline{CD} > 3$ 이므로  $\overline{CD} = 6$

$$\overline{AC} = \overline{DB} = 3\sqrt{3}, \overline{AD} = \overline{CB} = 3,$$

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

사각형 ADCB는 직사각형이다.

그러므로  $\overline{AC} = \overline{DB}, \overline{DA} = \overline{BC}$



조건 (가)에 의하여

$$\frac{3}{2}\overline{DP} - \overline{AB} = k\overline{BC} \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}\overline{DP} - (\overline{DB} - \overline{DA}) = k\overline{BC}$$

$$\frac{3}{2}\overline{DP} - \overline{DB} = k\overline{BC} - \overline{DA}$$

$$= k\overline{BC} - \overline{BC}$$

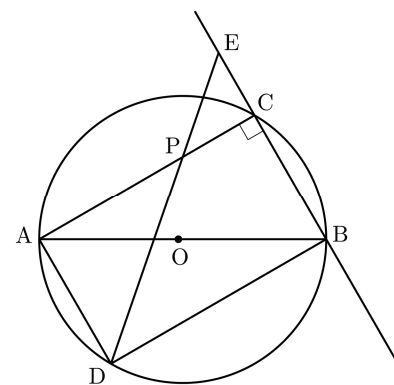
$$= (k-1)\overline{BC}$$

$\overline{DE} = \frac{3}{2}\overline{DP}$ 를 만족시키는 점을 E라 하면

$$\overline{DE} - \overline{DB} = (k-1)\overline{BC}$$

$$\overline{BE} = (k-1)\overline{BC}$$

그러므로 점 E는 직선 BC 위에 있다.

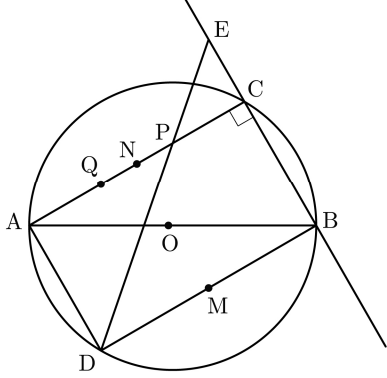


두 삼각형 EPC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비가 1:3이므로

$$\overline{BE} = \frac{3}{2}\overline{BC} \text{이므로 } k-1 = \frac{3}{2} \text{에서 } k = \frac{5}{2}$$

$$\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{DB} = \sqrt{3}$$

$$\text{그러므로 } \overline{AP} = \overline{AC} - \overline{PC} = 2\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{7}$$



선분 BD의 중점을 M이라 하면

조건 (나)에 의하여  $\overline{QB} \cdot \overline{QD} = 3$

$$\begin{aligned} \overline{QB} \cdot \overline{QD} &= (\overline{QM} + \overline{MB}) \cdot (\overline{QM} + \overline{MD}) \\ &= |\overline{QM}|^2 + \overline{QM} \cdot (\overline{MB} + \overline{MD}) + \overline{MB} \cdot \overline{MD} \\ &= |\overline{QM}|^2 + \overline{QM} \cdot \vec{0} - |\overline{MB}|^2 \\ &= |\overline{QM}|^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= |\overline{QM}|^2 - \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } |\overline{QM}|^2 = \frac{39}{4}$$

선분 AC의 중점을 N이라 하면

$$\overline{MN} = \overline{BC} = 3$$

$$\begin{aligned} |\overline{QM}|^2 &= |\overline{QN}|^2 + |\overline{MN}|^2 \\ &= |\overline{QN}|^2 + 9 \end{aligned}$$

$$|\overline{QN}|^2 = |\overline{QM}|^2 - 9 = \frac{3}{4}$$

$$|\overline{QN}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AC} - \overline{QC} \text{ 이므로}$$

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{3} \text{ 또는 } |\overline{AQ}| = 2\sqrt{3}$$

$$|\overline{AQ}| = 2\sqrt{3} \text{ 이면 } \textcircled{7} \text{에 의하여}$$

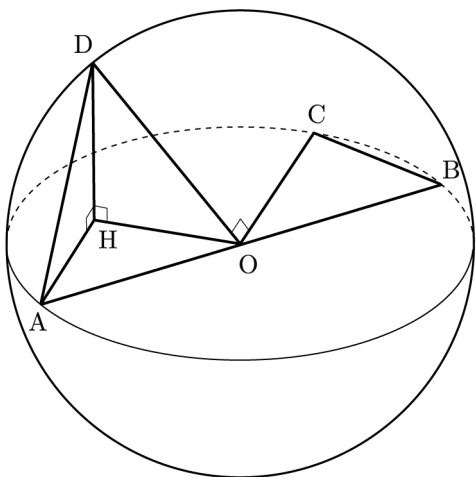
점 P는 점 Q와 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } |\overline{AQ}| = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \overline{AQ} \cdot \overline{DP} &= |\overline{AQ}| \times |\overline{DP}| \times \cos(\angle DPA) \\ &= |\overline{AQ}| \times |\overline{AP}| \\ &= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k \times (\overline{AQ} \cdot \overline{DP}) = \frac{5}{2} \times 6 = 15$$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



조건 (가)에 의하여

$\overline{OC} \perp \overline{OD}$ ,  $\overline{DH} \perp$  (평면 COH) 이므로

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{OH} \perp \overline{OC}$

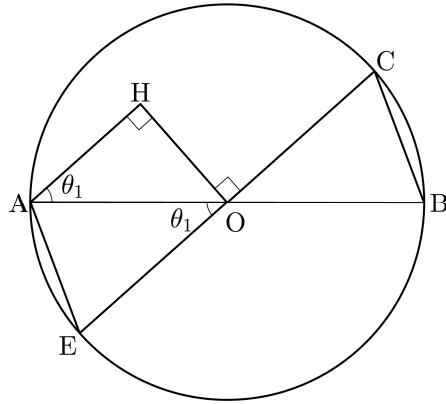
$\overline{DH} \perp$  (평면 ABC) 이므로  $\overline{DH} \perp \overline{OH}$

조건 (나)에 의하여

$\overline{AD} \perp \overline{OH}$ ,  $\overline{OH} \perp \overline{DH}$  이므로

$\overline{OH} \perp$  (평면 DAH)

그러므로  $\overline{OH} \perp \overline{AH}$



직선 OC와 구가 만나는 점 중 점 C가 아닌

점을 E라 하면  $\overline{AE} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$

$\angle AOE = \theta_1$ 이라 하면  $\angle OAH = \angle AOE = \theta_1$

삼각형 OAE에서

$$\cos \theta_1 = \frac{4^2 + 4^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 4 \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{그러므로 } \overline{AH} = \overline{OA} \cos \theta_1 = 4 \times \frac{3}{4} = 3$$

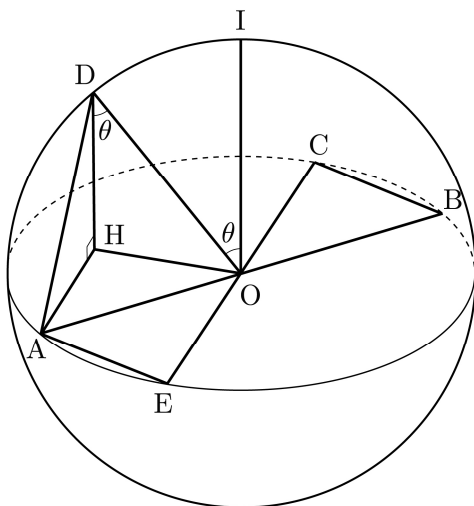
$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

삼각형 DHO에서

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{16 - 7} = 3$$

삼각형 DAH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$



점 O를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선과 구가 만나는 점 중 점 D에 가까운 점을 I라 하자.

$\overline{DH} \parallel \overline{OI}$ 이므로  $\overline{DH} \parallel$  (평면 IEC)

$\overline{AH} \parallel \overline{EC}$ 이므로  $\overline{AH} \parallel$  (평면 IEC)

그러므로 두 직선 DH, AH를 포함하는

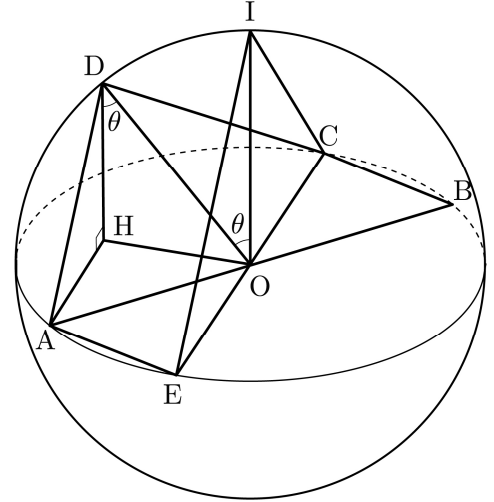
평면 DAH는 평면 IEC와 평행하다.

직선 CE는 두 평면 IEC, DOC의 교선이고

$\overline{CE} \perp \overline{OI}$ ,  $\overline{CE} \perp \overline{OD}$ 이므로

두 평면 IEC, DOC가 이루는 예각의 크기를

$\theta$ 라 하면  $\angle DOI = \theta$



$\angle ODH = \angle DOI = \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \cos(\angle ODH) = \frac{\overline{DH}}{\overline{OD}} = \frac{3}{4}$$

삼각형 DAH의 넓이를  $S_1$ 이라 하면

$$S = S_1 \times \cos \theta = \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8}$$

따라서  $8S = 27$