

● 수학 영역 ●

수학 정답

|    |    |    |    |    |     |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|
| 1  | ⑤  | 2  | ③  | 3  | ②   | 4  | ①  | 5  | ④  |
| 6  | ⑤  | 7  | ①  | 8  | ②   | 9  | ③  | 10 | ④  |
| 11 | ②  | 12 | ⑤  | 13 | ②   | 14 | ③  | 15 | ③  |
| 16 | 3  | 17 | 16 | 18 | 113 | 19 | 80 | 20 | 36 |
| 21 | 13 | 22 | 2  |    |     |    |    |    |    |

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$\sqrt[3]{54} \times 2^{\frac{5}{3}} = (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 3^1 \times 2^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} \\ = 3 \times 2^2 = 12$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \text{ 이므로 } f'(3) = 27 - 18 + 1 = 10$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h} = \frac{1}{2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ = \frac{1}{2} \times f'(3) = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

3. [출제의도] 삼각함수의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

$$\sin \theta + \cos \theta \tan \theta = -1 \text{ 에서}$$

$$\sin \theta + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1 \text{ 이므로 } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \text{ 이고 } \cos \theta > 0 \text{ 이므로 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수  $f(x)$  가  $x=3$  에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + a) = 6 + a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 2 - a$$

$$\text{이므로 } 6 + a = 2 - a, \quad a = -2$$

5. [출제의도] 부정적분을 이해하여 적분상수의 값을 구한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x \text{ 에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x) dx$$

$$= x^3 + x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수})$$

$$f(1) = 1 + 1 + C = 6 \text{ 이므로 } C = 4 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(0) = C = 4$$

6. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하여 항을 구한다.

등비수열  $\{a_n\}$  의 공비를  $r$  ( $r > 1$ ) 이라 하면

$$S_4 = \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}, \quad S_2 = \frac{a_1(r^2 - 1)}{r - 1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{r^4 - 1}{r^2 - 1} = r^2 + 1 = 5, \quad r^2 = 4$$

$$r > 1 \text{ 이므로 } r = 2$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 = a_1 \times 16 = 48 \text{ 이므로 } a_1 = 3$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 = 3 \times 8 = 24$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_4 = 3 + 24 = 27$$

7. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 구간의 길이의 최댓값을 구한다.

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

$f'(x) = 0$  에서  $x = -1$  또는  $x = 5$

$f(x)$  의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |    |            |    |            |
|---------|------------|----|------------|----|------------|
| $x$     | ...        | -1 | ...        | 5  | ...        |
| $f'(x)$ | +          | 0  | -          | 0  | +          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

$-1 \leq a < b \leq 5$  일 때, 함수  $f(x)$  는 닫힌구간  $[a, b]$  에서 감소한다. 따라서  $b - a$  의 최댓값은  $5 - (-1) = 6$

8. [출제의도] 곱의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$$(x+1)f(x) + (1-x)g(x) = x^3 + 9x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ 에 } x=0 \text{ 을 대입하면 } f(0) + g(0) = 1$$

$$f(0) = 4 \text{ 이므로 } g(0) = -3 \text{ 이다.}$$

$\textcircled{1}$  의 양변을 미분하면

$$f(x) + (x+1)f'(x) - g(x) + (1-x)g'(x) = 3x^2 + 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 에 } x=0 \text{ 을 대입하면 } f(0) + f'(0) - g(0) + g'(0) = 9$$

$$\text{따라서 } f'(0) + g'(0) = 9 - f(0) + g(0) = 9 - 4 + (-3) = 2$$

9. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

두 점  $(0, 0)$ ,  $(\log_2 9, k)$  를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{k-0}{\log_2 9 - 0} = \frac{k}{2 \log_2 3}$$

직선  $(\log_4 3)x + (\log_9 8)y - 2 = 0$  의 기울기는

$$-\frac{\log_4 3}{\log_9 8} = -\frac{\frac{1}{2} \log_2 3}{\frac{3}{2} \log_3 2} = -\frac{\log_2 3}{3 \log_3 2}$$

두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{2 \log_2 3} \times \left( -\frac{\log_2 3}{3 \log_3 2} \right) = -1, \quad k = 6 \log_3 2$$

$$\text{따라서 } 3^k = 3^{6 \log_3 2} = 3^{\log_3 2^6} = 2^6 = 64$$

10. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각  $t$  ( $t \geq 0$ ) 에서 두 점 P, Q 의 위치를 각각

$x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  라 하면

$$x_1(t) = t^3 - 3t^2 - 2t, \quad x_2(t) = -t^2 + 6t$$

$$x_1(t) - x_2(t) = t^3 - 2t^2 - 8t = t(t+2)(t-4) = 0 \text{ 에서}$$

두 점 P, Q 가 다시 만날 때의 시각은  $t=4$  이다.

점 Q 가 시각  $t=0$  에서  $t=4$  까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v_2(t)| dt = \int_0^4 |-2t + 6| dt \\ = \int_0^3 |-2t + 6| dt + \int_3^4 |-2t + 6| dt \\ = \int_0^3 (-2t + 6) dt + \int_3^4 (2t - 6) dt \\ = \left[ -t^2 + 6t \right]_0^3 + \left[ t^2 - 6t \right]_3^4 = 9 + 1 = 10$$

11. [출제의도] 등차수열을 이해하여 등차수열의 합을 구한다.

등차수열  $\{a_n\}$  의 공차를  $d$  ( $d < 0$ ) 이라 하자.

$a_6$ ,  $d$  가 모두 정수이므로 등차수열  $\{a_n\}$  의 모든 항은 정수이다.

$$d = a_6 - a_5 = -2 - a_5 \text{ 이고 } d < 0 \text{ 이므로 } a_5 > -2$$

즉,  $a_5 = -1$  또는  $a_5$  는 음이 아닌 정수이다.

( i )  $a_5 = -1$  일 때

$$d = -2 - a_5 = -1 \text{ 이므로 } a_n = -n + 4$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = -4, \quad \sum_{k=1}^8 |a_k| = 16 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 성립하지 않는다.

( ii )  $a_5$  는 음이 아닌 정수일 때

$$n \leq 5 \text{ 일 때 } a_n \geq 0 \text{ 이고 } |a_n| = a_n$$

$$n \geq 6 \text{ 일 때 } a_n < 0 \text{ 이고 } |a_n| = -a_n$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } -a_6 - a_7 - a_8 = a_6 + a_7 + a_8 + 42$$

$$a_6 + a_7 + a_8 = -21$$

$$a_6 + (a_6 + d) + (a_6 + 2d) = -21, \quad a_6 + d = -7$$

$$a_6 = -2 \text{ 이므로 } d = -5$$

$$( \text{ i } ), ( \text{ ii } ) \text{ 에서 } d = -5 \text{ 이고 } a_1 = a_6 - 5d = -2 + 25 = 23$$

$$\text{이다. 따라서 } \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{8 \times \{2 \times 23 + 7 \times (-5)\}}{2} = 44$$

12. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 극댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt \text{ 의 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) = f(x) \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수  $g(x)$  는  $x=2$  에서 극솟값을 가지므로

$$g'(2) = 6 + a = 0 \text{ 에서 } a = -6 \text{ 이다.}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x < 0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$g(x)$  의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

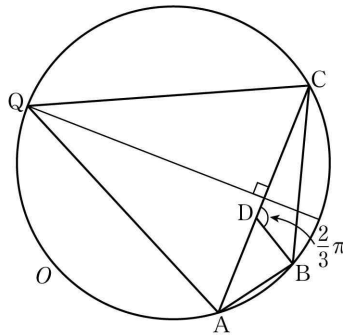
|         |            |    |            |    |            |
|---------|------------|----|------------|----|------------|
| $x$     | ...        | -2 | ...        | 2  | ...        |
| $g'(x)$ | +          | 0  | -          | 0  | +          |
| $g(x)$  | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $g(x)$  의 극댓값은

$$g(-2) = \int_{-4}^{-2} (3t^2 + 3t - 6) dt = \left[ t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_{-4}^{-2} = 26$$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원에 관한 문제를 해결한다.

점 B 를 포함하지 않는 호 AC 와 선분 AC 의 수직이등분선의 교점을 R 이라 하자. P=R 일 때, 삼각형 PAC 의 넓이가 최대가 되므로 Q=R 이다.



$$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8} \text{ 이므로}$$

$$\cos(\angle CQA) = \cos(\pi - \angle ABC) = -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$$

$$\overline{QA} = \overline{QC} = 6\sqrt{10} \text{ 이므로}$$

삼각형 QAC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QC}^2 - 2 \times \overline{QA} \times \overline{QC} \times \cos(\angle CQA) \\ = (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \frac{5}{8} = 270$$

$$\overline{AB} = a \quad (a > 0) \text{ 이라 하면 } 2\overline{AB} = \overline{BC} \text{ 에서 } \overline{BC} = 2a \text{ 이다.}$$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC) \\ = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \left( -\frac{5}{8} \right) = \frac{15}{2}a^2$$

$$\frac{15}{2}a^2 = 270 \text{ 에서 } a = 6$$

삼각형 CDB 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라

하면 삼각형 CDB 에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = \frac{2a}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } R = 4\sqrt{3}$$

14. [출제의도] 다항함수의 그래프를 이용하여 교점의 개수를 추론한다.

$$x > 0 \text{ 에서 } f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5 \text{ 이고 } f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \text{ 이다.}$$

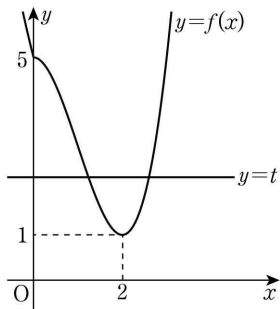
$f'(2) = 0$  이고  $x=2$  의 좌우에서  $f'(x)$  의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로  $f(x)$  의 극솟값은  $f(2) = 1$  이다.

$x \leq 0$ 에서  $f(x) = x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} + b^2 = (x-a)^2 - \frac{3}{4}a^2 + b^2$

이고  $f(0) = \frac{a^2}{4} + b^2$

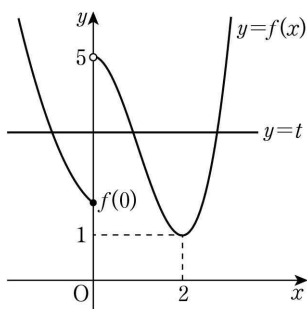
(i)  $a \geq 0$ 인 경우

①  $f(0) = 5$ 인 경우



함수  $g(t)$ 는  $t=1$ 에서만 불연속이므로 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수는 1이다.

②  $f(0) \neq 5$ 인 경우



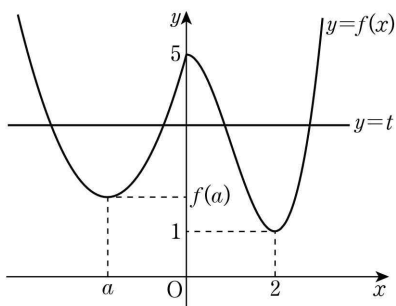
함수  $g(t)$ 는  $t=1, t=5, t=f(0)$ 에서 불연속이다. 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수가 2가 되려면  $f(0) = \frac{a^2}{4} + b^2 = 1$ 이다.

$$\frac{a^2}{4} = 0, b^2 = 1 \text{ 또는 } \frac{a^2}{4} = 1, b^2 = 0$$

을 만족시키는 두 정수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 는  $(0, 1), (0, -1), (2, 0)$

(ii)  $a < 0$ 인 경우

①  $f(0) = 5$ 인 경우

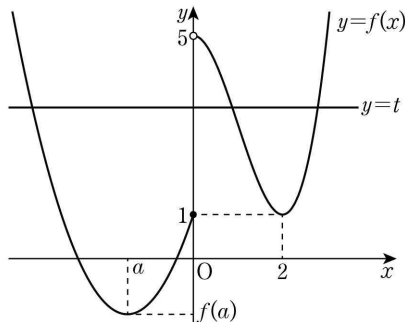


함수  $g(t)$ 는  $t=1, t=5, t=f(a)$ 에서 불연속이다. 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수가 2가 되려면

$$f(a) = -\frac{3}{4}a^2 + b^2 = 1, f(0) = \frac{a^2}{4} + b^2 = 5 \text{이다.}$$

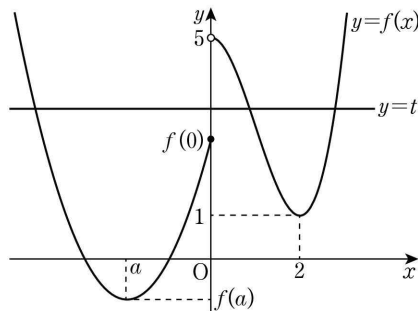
$a^2 = 4, b^2 = 4$ 를 만족시키는 두 정수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 는  $(-2, 2), (-2, -2)$

②  $f(0) = 1$ 인 경우



$f(a) < 1 < 5$ 이고 함수  $g(t)$ 는  $t=f(a), t=1, t=5$ 에서 불연속이므로 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수가 3이다.

③  $f(0) \neq 1$ 이고  $f(0) \neq 5$ 인 경우



$g(t)$ 는  $t=1, t=5, t=f(0)$ 에서 불연속이므로 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수는 3 이상이다.

(i), (ii)에서 구하는 두 정수  $a, b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수는  $(0, 1), (0, -1), (2, 0), (-2, 2), (-2, -2)$ 로 5

### 15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$a_4 \leq 4$ 이면  $a_5 = 10 - a_4 = 5$ 에서  $a_4 = 5$ 이므로  $a_4 \leq 4$ 를 만족시키지 않는다. 그러므로  $a_4 > 4$ 이고  $a_4 = a_5$ 에서  $a_4 = 5$ 이다.

$a_3 > 3$ 일 때,  $a_3 = a_4$ 에서  $a_3 = 5$ 이고

$a_3 \leq 3$ 일 때,  $a_4 = 7 - a_3 = 5$ 에서  $a_3 = 2$ 이다.

(i)  $a_3 = 5$ 인 경우

①  $a_2 > 2$ 이면  $a_2 = a_3$ 에서  $a_2 = 5$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때,  $a_1 = a_2$ 에서  $a_1 = 5$ 이고

$a_1 \leq 1$ 일 때,  $a_2 = 1 - a_1 = 5$ 에서  $a_1 = -4$ 이다.

②  $a_2 \leq 2$ 이면  $a_3 = 4 - a_2 = 5$ 에서  $a_2 = -1$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때,  $a_1 = a_2 = -1$ 이므로  $a_1 > 1$ 을 만족시키지 않는다.

$a_1 \leq 1$ 일 때,  $a_2 = 1 - a_1 = -1$ 에서  $a_1 = 2$ 이므로  $a_1 \leq 1$ 을 만족시키지 않는다.

(ii)  $a_3 = 2$ 인 경우

①  $a_2 > 2$ 이면  $a_2 = a_3$ 에서  $a_2 = 2$ 이므로  $a_2 > 2$ 를 만족시키지 않는다.

②  $a_2 \leq 2$ 이면  $a_3 = 4 - a_2 = 2$ 에서  $a_2 = 2$ 이다.

$a_1 > 1$ 일 때,  $a_1 = a_2$ 에서  $a_1 = 2$ 이고

$a_1 \leq 1$ 일 때,  $a_2 = 1 - a_1 = 2$ 에서  $a_1 = -1$ 이다.

(i), (ii)에서  $a_1 = 5$  또는  $a_1 = -4$  또는  $a_1 = 2$  또는  $a_1 = -1$ 이다. 따라서 구하는 모든  $a_1$ 의 값의 곱은  $5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$

### 16. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

$$4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9} \text{에서 } 2^{2x} = (2^{-1})^{x-9}, 2^{2x} = 2^{-x+9}$$

지수함수의 성질에 의하여  $2x = -x + 9, x = 3$

### 17. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (3x^2 - 2x + 3) dx - \int_2^0 (2x + 1) dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 2x + 3) dx + \int_0^2 (2x + 1) dx \\ &= \int_0^2 \{(3x^2 - 2x + 3) + (2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 + 4) dx = \left[x^3 + 4x\right]_0^2 = 2^3 + 4 \times 2 = 16 \end{aligned}$$

### 18. [출제의도] $\sum$ 의 성질을 이해하여 수열의 항을 구한다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k = A, \sum_{k=1}^9 a_k = B$ 라 하면  $\sum_{k=1}^9 2a_k = 2 \sum_{k=1}^9 a_k = 2B$   
 $A + B = 137, A - 2B = 101$   
 에서  $A = 125, B = 12$ 이다.

따라서  $a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k = A - B = 113$

### 19. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$$f(0) = 2, f(2) = 2a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5x + a \text{에서 } f'(0) = a, f'(2) = a + 2$$

직선  $l$ 의 방정식은  $y = f'(0)x + f(0)$

$$y = ax + 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

직선  $m$ 의 방정식은  $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$$y = (a+2)x - 4 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 두 직선  $l, m$ 이 만나는 점의 좌표는

$(3, 3a+2)$ 이고 이 점이  $x$ 축 위에 있으므로  $3a+2=0$

$$a = -\frac{2}{3} \text{이므로 } f(2) = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } 60 \times |f(2)| = 60 \times \left|-\frac{4}{3}\right| = 80$$

### 20. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

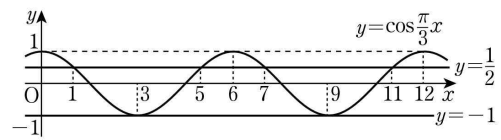
$f(g(x)) = g(x)$ 에서  $g(x) = t (-1 \leq t \leq 1)$ 이라 하면

$$f(t) = t \text{에서 } 2t^2 + 2t - 1 = t, (2t-1)(t+1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -1 \text{이므로 } g(x) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(x) = -1$$

함수  $g(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 6이고,  $g(1) = g(5) = \frac{1}{2}$ ,

$g(3) = -1$ 이다.



$$\text{그러므로 } 0 \leq x < 12 \text{에서 } g(7) = g(11) = \frac{1}{2}, g(9) = -1$$

이다. 따라서 구하는 모든 실수  $x$ 의 값의 합은

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

### 21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점  $C\left(k, \frac{19}{2}\right)$

라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.

두 곡선  $y = a^x + 2, y = \log_a x + 2$ 를  $y$ 축의 방향으로 각각  $-2$ 만큼 평행이동한 두 곡선  $y = a^x, y = \log_a x$ 가 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를  $y$ 축의 방향으로 각각  $-2$ 만큼 평행이동한 두 점 A', B'도 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

점 C를  $y$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동한 점

$C'\left(k, \frac{15}{2}\right)$ 가 선분 A'B'의 중점이므로 점 C'은

직선  $y = x$  위에 있다. 그러므로  $k = \frac{15}{2}$ 이다.

$$\text{넓이가 } \frac{121}{2}\pi \text{인 원의 반지름의 길이는 } \overline{AC'} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$$

이고 직선 A'B'의 기울기가  $-1$ 이므로

$$\text{점 A'의 좌표는 } \left(\frac{15}{2} - \frac{11}{2}, \frac{15}{2} + \frac{11}{2}\right) = (2, 13)$$

점 A'(2, 13)이 곡선  $y = a^x$  위의 점이므로  $a^2 = 13$

### 22. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

$$h(x) = x^3 - 3x + 8 \text{이라 하면 } f(x) = |h(x)|$$

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$h'(x) = 0$ 에서  $x = -1$  또는  $x = 1$

$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |      |            |     |            |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$     | $\dots$    | $-1$ | $\dots$    | $1$ | $\dots$    |
| $h'(x)$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $h(x)$  | $\nearrow$ | 극대   | $\searrow$ | 극소  | $\nearrow$ |

극댓값은  $h(-1) = 10$ 이고 극솟값은  $h(1) = 6$ 이다.

$y = h(x)$ 의 극솟값이 양수이므로 함수  $y = h(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 한 점에서 만난다.

즉 방정식  $h(x) = 0$ 은 한 개의 실근  $x = a$ 를 갖고,

$$f(x) = \begin{cases} -h(x) & (x < a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases} \text{이다.}$$

방정식  $f(t)=f(t+2)$ 의 해를 구하자.

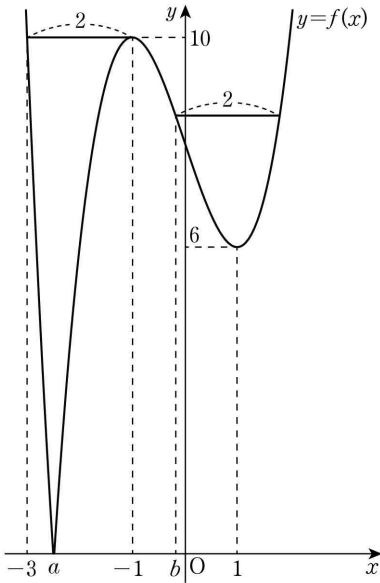
$a-2<t<a$ 일 때,  $-t^3+3t-8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$t^3+3t^2+3t+9=(t+3)(t^2+3)=0$ 에서  $t=-3$

$t\leq a-2$  또는  $t\geq a$ 일 때,

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8, 3t^2+6t+1=0$ 에서

$t=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$ 이다.  $\frac{-3+\sqrt{6}}{3}=b$ 라 하면  $b>-1$



$t<-3$ 일 때, 닫힌구간  $[t, t+2]$ 에서의  $f(x)$ 의 최댓값이  $f(t)$ 이므로  $g(t)=f(t)$ 이다.

$-3\leq t\leq-1$ 일 때, 닫힌구간  $[t, t+2]$ 에서의  $f(x)$ 의 최댓값이  $f(-1)=10$ 이므로  $g(t)=10$ 이다.

$-1< t\leq b$ 일 때, 닫힌구간  $[t, t+2]$ 에서의  $f(x)$ 의 최댓값이  $f(t)$ 이므로  $g(t)=f(t)$ 이다.

$b<t$ 일 때, 닫힌구간  $[t, t+2]$ 에서의  $f(x)$ 의 최댓값이  $f(t+2)$ 이므로  $g(t)=f(t+2)$ 이다.

즉 함수  $g(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} -t^3+3t-8 & (t<-3) \\ 10 & (-3\leq t\leq-1) \\ t^3-3t+8 & (-1<t\leq b) \\ t^3+6t^2+9t+10 & (b<t) \end{cases}$$

$$\lim_{t\rightarrow-3-} g(t)=10=g(-3)=\lim_{t\rightarrow-3+} g(t)$$

$$\lim_{t\rightarrow-1-} g(t)=10=g(-1)=\lim_{t\rightarrow-1+} g(t)$$

$$\lim_{t\rightarrow b-} g(t)=g(b)=\lim_{t\rightarrow b+} g(t)$$

이므로  $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{t\rightarrow-3-} \frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)} &= \lim_{t\rightarrow-3-} \frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3} \\ &= \lim_{t\rightarrow-3-} (-t^2+3t-6)=-24 \end{aligned}$$

$$\lim_{t\rightarrow-3+} \frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=0$$

이므로  $g(t)$ 는  $t=-3$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t\rightarrow-1-} \frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\rightarrow-1+} \frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)} &= \lim_{t\rightarrow-1+} \frac{(t+1)(t^2-t-2)}{t+1} \\ &= \lim_{t\rightarrow-1+} (t^2-t-2)=0 \end{aligned}$$

이므로  $g(t)$ 는  $t=-1$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} \lim_{t\rightarrow b-} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} &= \lim_{t\rightarrow b-} \frac{(t-b)(t^2+bt+b^2-3)}{t-b} \\ &= \lim_{t\rightarrow b-} (t^2+bt+b^2-3)=3b^2-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\rightarrow b+} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} &= \lim_{t\rightarrow b+} \frac{(t-b)\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}}{t-b} \\ &= \lim_{t\rightarrow b+} \{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\} \\ &= 3b^2+12b+9 \end{aligned}$$

$b>-1$ 이므로  $3b^2-3\neq 3b^2+12b+9$

즉  $g(t)$ 는  $t=b$ 에서 미분가능하지 않다.

그러므로  $\alpha=-3, \beta=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이고  $\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

따라서  $m=3, n=-1$ 이므로  $m+n=2$

#### [확률과 통계]

|    |   |    |     |    |    |    |   |    |   |
|----|---|----|-----|----|----|----|---|----|---|
| 23 | ① | 24 | ⑤   | 25 | ②  | 26 | ④ | 27 | ③ |
| 28 | ② | 29 | 117 | 30 | 90 |    |   |    |   |

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

$${}_3\text{H}_3={}_3+{}_3-1\text{C}_3={}_5\text{C}_3=10$$

24. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이므로 2가지, 남은 세 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 3가지이므로  ${}_3\Pi_3=27$

홀수의 개수는  $2\times 27=54$

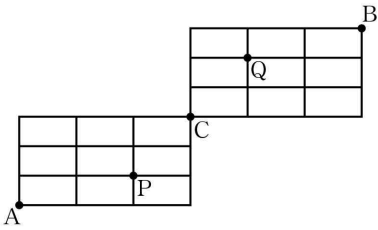
25. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

여학생 2명을 한 사람으로 보고 6명을 배열하는 원순열의 수는  $(6-1)!=120$

여학생 2명의 자리를 정하는 방법의 수는  $2!$

구하는 경우의 수는  $120\times 2!=240$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.



오른쪽으로 한 칸 가는 것을  $a$ , 위쪽으로 한 칸 가는 것을  $b$ 라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의  $a$ 와 1개의  $b$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로  $\frac{3!}{2!1!}=3$

마찬가지 방법으로 P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는  $\frac{3!}{1!2!}=3$

A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는  $3\times 3=9$  ..... ㉠

마찬가지 방법으로 C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는  $\frac{6!}{3!3!}=20$

C 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같으므로 9

C 지점에서 B 지점까지 Q 지점을 지나지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수는  $20-9=11$  ..... ㉡

㉠, ㉡에 의해 구하는 경우의 수는

$$9\times 11=99$$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적힌 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.

(i) 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우

홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 선택하는 경우의 수는  ${}_4\text{C}_1\times {}_3\text{C}_2=4\times 3=12$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누

어 넣는 경우의 수는  $\frac{3!}{3!}=1$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어

넣는 경우의 수는  $\frac{4!}{2!1!1!}=12$ 이므로

$$12\times 1\times 12=144$$

(ii) 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우

홀수가 적힌 상자 3개를 선택하는 경우의 수는

$${}_4\text{C}_3=4$$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누

어 넣는 경우의 수는  $\frac{3!}{3!}=1$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어

넣는 경우의 수는  $\frac{4!}{2!1!1!}=12$ 이므로

$$4\times 1\times 12=48$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$144+48=192$$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

$$720=2^4\times 3^2\times 5\text{이다.}$$

(i)  $b=1$ 인 경우

$ac=2^4\times 3^2\times 5$ 이므로  $a, c$ 는  $2^4\times 3^2\times 5$ 의 약수이다.

가능한 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $2^4\times 3^2\times 5$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(4+1)\times (2+1)\times (1+1)=5\times 3\times 2=30$$

이 중  $a$ 와  $c$ 가 서로소인 경우는  $a$ 와  $c$ 의 공약수가 1뿐인 경우이므로

$2^4$ 이  $a$  또는  $c$ 의 약수이고

$3^2$ 이  $a$  또는  $c$ 의 약수이고

5가  $a$  또는  $c$ 의 약수인 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는

$${}_2\Pi_3=8$$

서로소가 아닌 자연수  $a, c$ 의 모든 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $30-8=22$

(ii)  $b=2$ 인 경우

$ac=2^2\times 3^2\times 5$ 이므로  $a, c$ 는  $2^2\times 3^2\times 5$ 의 약수이다.

가능한 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $2^2\times 3^2\times 5$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(2+1)\times (2+1)\times (1+1)=3\times 3\times 2=18$$

이 중  $a$ 와  $c$ 가 서로소인 경우는  $a$ 와  $c$ 의 공약수가 1뿐인 경우이므로

$2^2$ 이  $a$  또는  $c$ 의 약수이고

$3^2$ 이  $a$  또는  $c$ 의 약수이고

5가  $a$  또는  $c$ 의 약수인 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는

$${}_2\Pi_3=8$$

서로소가 아닌 자연수  $a, c$ 의 모든 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $18-8=10$

(iii)  $b=3$ 인 경우

$ac=2^4\times 5$ 이므로  $a, c$ 는  $2^4\times 5$ 의 약수이다.

가능한 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $2^4\times 5$ 의 약수의 개수와 같으므로  $(4+1)\times (1+1)=5\times 2=10$

이 중  $a$ 와  $c$ 가 서로소인 경우는  $a$ 와  $c$ 의 공약수가 1뿐인 경우이므로

$2^4$ 이  $a$  또는  $c$ 의 약수이고

5가  $a$  또는  $c$ 의 약수인 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는

$${}_2\Pi_2=4$$

서로소가 아닌 자연수  $a, c$ 의 모든 순서쌍  $(a, c)$ 의 개수는  $10-4=6$

(iv)  $b=4$ 인 경우

$ac=3^2\times 5$ 이므로  $a$ 와  $c$ 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍  $(a, c)$ 는  $(3, 15)$  또는  $(15, 3)$ 이므로 순서쌍의 개수는 2

(v)  $b=6$ 인 경우

$ac=2^2\times 5$ 이므로  $a$ 와  $c$ 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍  $(a, c)$ 는  $(2, 10)$  또는  $(10, 2)$ 이므로 순서쌍의 개수는 2

(vi)  $b=12$ 인 경우

조건을 만족하는 순서쌍  $(a, b)$ 는 존재하지 않는다.

(i) ~ (vi)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$22+10+6+2+2=42$$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(i) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 1명을 선택하는 경우의 수는  ${}_3\text{C}_1=3$

남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩

나누어 주는 경우의 수는  ${}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 2! = 6$   
조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 1명의 학생에게 사탕 1개를 나누어주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는  ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 이므로  $3 \times 6 \times 6 = 108$   
(ii) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우 초콜릿을 받지 못하는 2명을 선택하는 경우의 수는  ${}_3C_2 = 3$   
남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는  ${}_3C_3 = 1$   
조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는  ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$   
이므로  $3 \times 1 \times 3 = 9$   
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는  $108 + 9 = 117$

### 30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (다)를 만족시키는  $a, b$ 에 대하여  $a < b$ 라고 하자.  
(i)  $a \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b \in \{1, 2, 3\}$ 인 경우  
 $f(a) > f(b)$ 이므로 조건 (가)에 모순이다.  
(ii)  $a \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b \in \{4, 5\}$ 인 경우  
가능한  $(a, b)$ 의 순서쌍은 (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은 (2, 5), (3, 4), (3, 5)뿐이다.  
①  $f(2) = 5$ ,  $f(5) = 2$ 인 경우  
조건 (가)를 만족시키도록  $f(1)$ ,  $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_5H_1 \times {}_1H_1 = 5$   
조건 (나)를 만족시키도록  $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_3C_1 = 3$ 이므로 함수  $f$ 의 개수는  $5 \times 3 = 15$   
②  $f(3) = 4$ ,  $f(4) = 3$ 인 경우  
조건 (가)를 만족시키도록  $f(1)$ ,  $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$   
조건 (나)에 의하여  $f(5) = 2$   
이므로 함수  $f$ 의 개수는  $10 \times 1 = 10$   
③  $f(3) = 5$ ,  $f(5) = 3$ 인 경우  
조건 (가)를 만족시키도록  $f(1)$ ,  $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$   
조건 (나)를 만족시키도록  $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_2C_1 = 2$ 이므로 함수  $f$ 의 개수는  $15 \times 2 = 30$   
 $f(2) = 5$ ,  $f(5) = 2$ 이고  $f(3) = 4$ ,  $f(4) = 3$ 이면 조건 (가)에 모순이므로 ①과 ②의 경우에서 중복되는 경우는 없다.  
(iii)  $a \in \{4, 5\}$ ,  $b \in \{4, 5\}$ 인 경우  
 $f(4) = 5$ ,  $f(5) = 4$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.  
조건 (가)를 만족시키도록  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$   
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는  $15 + 10 + 30 + 35 = 90$

[미적분]

|    |   |    |     |    |    |    |   |    |   |
|----|---|----|-----|----|----|----|---|----|---|
| 23 | ① | 24 | ③   | 25 | ⑤  | 26 | ④ | 27 | ② |
| 28 | ③ | 29 | 270 | 30 | 84 |    |   |    |   |

### 23. [출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1} = -\frac{1}{3}$$

### 24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + \frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2b_n}{n}} = \frac{1+3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

### 25. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$$2n+3 < a_n < 2n+4 \text{ 에서 } \frac{2n+3}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{2n+4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{수열의 극한의 대소 관계에 의하여 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+1)^2 + 6n^2}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{1}{n}\right)^2 + 6}{\frac{a_n}{n}} = \frac{2^2 + 6}{2} = 5$$

### 26. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 일반항을 구한다.

$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2$ 이므로 수열  $\{a_n\}$ 은 공차가  $(a_1 + 2)$ 인 등차수열이다.

$$a_n = a_1 + (n-1) \times (a_1 + 2) = (a_1 + 2)n - 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{a_n - n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_1 + 5)n - 4}{(a_1 + 1)n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_1 + 5 - \frac{4}{n}}{a_1 + 1 - \frac{1}{n}} = \frac{2a_1 + 5}{a_1 + 1} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a_1 = 2$$

$$a_{10} = (2+2) \times 10 - 2 = 38$$

### 27. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차는 3이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3 \text{ 이라 하면 } n \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$\begin{aligned} a_n (b_n)^2 &= S_n - S_{n-1} = (n^3 - n + 3) - \{(n-1)^3 - (n-1) + 3\} \\ &= 3n^2 - 3n = 3n(n-1) \end{aligned}$$

$$(b_n)^2 = n - 1$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } S_1 = a_1 (b_1)^2 = 3 \text{ 에서 } (b_1)^2 = 1$$

수열  $\{b_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$b_n = \sqrt{n-1} \ (n \geq 2), \quad b_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1} \sqrt{2n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

### 28. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$$x^2 + n^2 - 1 = 2nx \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2nx + (n+1)(n-1) = 0$$

$$(x-n-1)(x-n+1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A_n(n-1, 2n^2-2n), \quad B_n(n+1, 2n^2+2n) \text{ 이라 하자.}$$

$$\overline{A_n B_n} = \sqrt{2^2 + (4n)^2} = \sqrt{16n^2 + 4} = 2\sqrt{4n^2 + 1}$$

원의 중심 (2, 0)과 직선  $2nx - y = 0$  사이의 거리는

$$\frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} \text{ 이므로 점 P와 직선 } 2nx - y = 0 \text{ 사이의 거}$$

$$\text{리를 } h \text{라 하면 } \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} - 1 \leq h \leq \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} + 1$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \overline{A_n B_n} \times \left( \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4n^2 + 1} \times \left( \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} + 1 \right) \\ &= 4n + \sqrt{4n^2 + 1} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{1} \\ &= 4 + \sqrt{4} = 6 \end{aligned}$$

### 29. [출제의도] 도형의 성질을 활용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

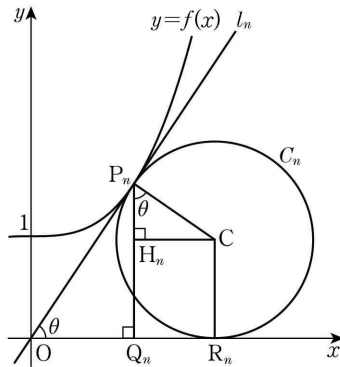
양의 실수  $t$ 에 대하여 점  $P_n(t, f(t))$ 라 하면

$$f'(t) = \frac{f(t)}{t}, \quad \frac{12t^3}{n^3} = \frac{4t^3}{n^3} + 1, \quad t^3 = \frac{n^3}{8}, \quad t = \frac{n}{2}$$

$$P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ 이므로 직선 } l_n \text{의 방정식은 } y = \frac{3}{n}x$$

원  $C_n$ 의 중심을 C라 하고 두 점  $P_n$ , C에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각  $Q_n$ ,  $R_n$ 이라 하자. 점 C에서 선분  $P_n Q_n$ 에 내린 수선의 발을  $H_n$ 이라 하자.

$$\angle CP_n O = \angle OQ_n P_n = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \angle P_n O Q_n = \angle CP_n H_n$$



$$\overline{OP_n} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{n^2 + 9}}{2} \text{ 이고,}$$

$$\angle P_n O Q_n = \theta \text{ 라 하면 } \cos \theta = \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{OP_n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 9}}$$

$$\overline{P_n C} = \overline{CR_n} = \overline{H_n Q_n} = r_n, \quad \overline{P_n Q_n} = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{P_n Q_n} = \overline{P_n H_n} + \overline{H_n Q_n} = r_n \times \cos \theta + r_n = \frac{3}{2}$$

$$r_n = \frac{3}{2(1 + \cos \theta)} = \frac{3\sqrt{n^2 + 9}}{2(\sqrt{n^2 + 9} + n)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \times \left( \frac{6\sqrt{n^2 + 9}}{\sqrt{n^2 + 9} + n} - 3 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{3\sqrt{n^2 + 9} - 3n}{\sqrt{n^2 + 9} + n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 \left\{ \frac{9}{(\sqrt{n^2 + 9} + n)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{\left( \sqrt{1 + \frac{9}{n^2}} + 1 \right)^2} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3) = 270$$

### 30. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함수값을 구한다.

$x > 0$ 일 때, 함수  $g(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$(i) \quad 0 < x < m \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{m} \right)^n = 0 \text{ 이므로 } g(x) = x$$

$$(ii) \quad x = m \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{m} \right)^n = 1 \text{ 이므로}$$

$$g(m) = \frac{f(m) + m}{2}$$

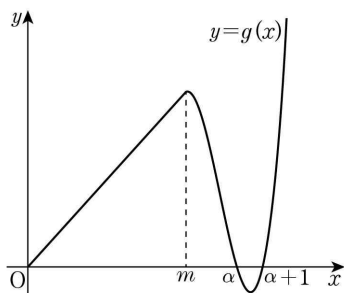
$$(iii) \quad x > m \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{x} \right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x \times \left( \frac{m}{x} \right)^n}{1 + \left( \frac{m}{x} \right)^n} = f(x)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases}x & (0<x<m) \\ \frac{f(m)+m}{2} & (x=m) \\ f(x) & (x>m)\end{cases}$$

조건 (가)에서 함수  $g(x)$ 가  $x=m$ 에서 미분가능하고 연속이므로  $1=f'(m)$ ,  $m=f(m)$   
조건 (나)에서  $g(k)g(k+1)=0$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수가 3이므로  $g(x)=0$ 을 만족시키는 자연수  $x$ 는 연속된 2개의 자연수이다. 이 두 자연수를  $\alpha$ ,  $\alpha+1$ 이라 하면 함수  $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식  $f(x)=0$ 의 세 근을  $\alpha$ ,  $\alpha+1$ ,  $\beta$ 라 하자.  
( i )  $g(m)<g(m+1)$  일 때,  
 $g'(m+1)\leq 0$ 이므로 조건 (다)에서  $g(l)\geq g(l+1)$ 을 만족시키는 세 자연수  $l$ 은  $m+1$ ,  $m+2$ ,  $m+3$ 이므로  $\alpha=m+3$   
 $f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)$   
 $= (x-m-3)(x-m-4)(x-\beta)$   
 $= \{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}(x-\beta)$   
 $f'(x)=(2x-2m-7)(x-\beta)$   
 $+ \{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}$   
 $f'(m)=-7(m-\beta)+12$   
 $f'(m)=1$ 이므로  $-7(m-\beta)+12=1$ ,  $m-\beta=\frac{11}{7}$   
 $m=f(m)=12(m-\beta)=\frac{132}{7}$ 이므로 모순이다.  
( ii )  $g(m)\geq g(m+1)$  일 때,  
조건 (다)에서  $g(l)\geq g(l+1)$ 을 만족시키는 세 자연수  $l$ 은  $m$ ,  $m+1$ ,  $m+2$ 이므로  $\alpha=m+2$   
 $f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)$   
 $= (x-m-2)(x-m-3)(x-\beta)$   
 $= \{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}(x-\beta)$   
 $f'(x)=(2x-2m-5)(x-\beta)$   
 $+ \{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}$   
 $f'(m)=-5(m-\beta)+6$   
 $f'(m)=1$ 이므로  $-5(m-\beta)+6=1$ ,  $m-\beta=1$   
 $m=f(m)=6(m-\beta)=6$   
 $m=6$ 일 때,  $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$ 에서  
 $g'(m+1)=f'(m+1)=-4$ 이므로 조건 (가)를 만족시키고,  $g(m)=f(m)\geq f(m+1)=g(m+1)$ 이다.  
( i ), ( ii)에 의하여  $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$ 이므로  
 $g(12)=f(12)=7\times 4\times 3=84$

[기하]

|    |   |    |    |    |     |    |   |    |   |
|----|---|----|----|----|-----|----|---|----|---|
| 23 | ㉓ | 24 | ㉔  | 25 | ㉕   | 26 | ㉖ | 27 | ㉗ |
| 28 | ㉘ | 29 | 29 | 30 | 150 |    |   |    |   |

23. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 초점 사이의 거리를 계산한다.

타원  $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$ 의 두 초점의 좌표를  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c>0$ )이라 하면  $c^2=17-8=9$ 에서  $c=3$   
두 초점의 좌표는  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$ 이므로  
두 초점 사이의 거리는 6

24. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 점의 좌표를 구한다.

포물선  $y^2=20x$ 의 초점의 좌표를  $(p, 0)$ 이라 하면  $4p=20$ 에서  $p=5$ 이므로 초점의 좌표는  $(5, 0)$ 이고 준선의 방정식은  $x=-5$ 이다.

포물선  $y^2=20x$  위의 점 P의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면  $\overline{PF}=15$ 이므로 포물선의 정의에 의하여  
 $15=5+t$ ,  $t=10$

25. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 주축의 길이를 구한다.

쌍곡선의 방정식을  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  ( $a>0$ ,  $b>0$ )이라 하자. 점근선의 방정식에서  $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ 이므로  
 $a=4k$ ,  $b=3k$  ( $k>0$ )이라 하자.  
쌍곡선의 두 초점의 좌표를  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  ( $c>0$ )이라 하면,  $2c=30$ ,  $c=15$   
 $c^2=a^2+b^2=25k^2=15^2$ 에서  $k^2=9$ ,  $k=3$   
 $a=4k=4\times 3=12$ 이므로 주축의 길이는  $2a=24$

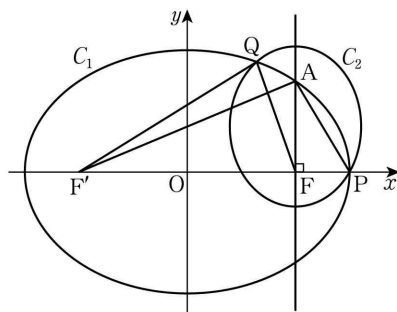
26. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

포물선  $C$ 가 원점을 지나므로  
 $(a-1)^2=1$ ,  $a=0$  또는  $a=2$  ..... ㉠  
포물선  $C$ 의 초점의  $x$ 좌표는  $\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$ 이고, 준선의 방정식은  $x=-\frac{a+b}{4}-\frac{1}{a+b}$ 이므로 이 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는  
 $\left|\frac{a+b}{4}-\left(-\frac{a+b}{4}\right)\right|=2$ ,  $\left|\frac{a+b}{2}\right|=2$ ,  $|a+b|=4$  ..... ㉡  
㉠, ㉡에서  
 $a=0$ 인 경우  $b=4$  또는  $b=-4$   
 $a=2$ 인 경우  $b=2$  또는  $b=-6$   
 $a-b$ 의 최댓값  $M$ 은  $M=2-(-6)=8$   
 $a-b$ 의 최솟값  $m$ 은  $m=0-4=-4$   
이므로  $M-m=8-(-4)=12$

27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하여 선분의 길이를 구한다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$ 의 두 초점의 좌표를  $F(0, c)$ ,  $F'(0, -c)$  ( $c>0$ )이라 하면  $c^2=7+9=16$ 에서  $c=4$   
점  $(0, 1)$ 을 A라 하면  $\overline{FA}=3$ ,  $\overline{F'A}=5$   
각의 이등분선의 성질에 의하여  $\overline{FP}:\overline{F'P}=3:5$   
 $\overline{FP}=3l$ ,  $\overline{F'P}=5l$  ( $l>0$ )이라 하면, 쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로  $\overline{F'P}-\overline{FP}=5l-3l=2l=6$ ,  $l=3$   
 $\overline{FP}+\overline{F'P}=8l=8\times 3=24$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



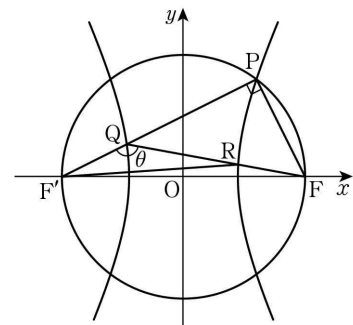
$\cos(\angle FF'A)=\frac{12}{13}$ 이므로 양의 실수  $a$ 에 대하여  
 $\overline{F'A}=13a$ ,  $\overline{FF'}=12a$ 라 하면  $\overline{FA}=5a$   
타원  $C_1$ 의 장축의 길이가 18이므로  $\overline{FA}+\overline{F'A}=18$   
 $13a+5a=18$ ,  $18a=18$ ,  $a=1$   
 $\overline{FA}=5a=5$ ,  $\overline{FP}=\frac{18-12a}{2}=3$ 이므로  
 $\overline{AP}=\sqrt{\overline{FA}^2+\overline{FP}^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$   
타원  $C_2$ 의 장축의 길이는  $\overline{AP}+\overline{FP}=\sqrt{34}+3$   
점 Q는 타원  $C_1$  위의 점이므로  $\overline{F'Q}+\overline{FQ}=18$   
점 Q는 타원  $C_2$  위의 점이므로  $\overline{AQ}+\overline{FQ}=\sqrt{34}+3$   
 $\overline{F'Q}-\overline{AQ}=(\overline{F'Q}+\overline{FQ})-(\overline{AQ}+\overline{FQ})$   
 $=18-(\sqrt{34}+3)=15-\sqrt{34}$

29. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

포물선  $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은  $x=-2$ 이다.  
포물선  $y^2=-x$ 의 준선의 방정식은  $x=\frac{1}{4}$ 이다.  
점 P의  $x$ 좌표를  $s$ 라 하면 점 P는 포물선  $x^2=ay$  위의 점이므로 점 P의 좌표는  $\left(s, \frac{1}{a}s^2\right)$   
점 Q의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면 점 Q는 포물선  $x^2=ay$  위의 점이므로 점 Q의 좌표는  $\left(t, \frac{1}{a}t^2\right)$   
직선 PQ의 기울기가  $2\sqrt{2}$ 이므로  
 $\frac{\frac{1}{a}s^2-\frac{1}{a}t^2}{s-t}=2\sqrt{2}$ ,  $\frac{1}{a}(s+t)=2\sqrt{2}$  ..... ㉠

점 P는 포물선  $y^2=8x$  위의 점이므로  
 $\left(\frac{1}{a}s^2\right)^2=8s$ ,  $s^3=8a^2$  ..... ㉡  
점 Q는 포물선  $y^2=-x$  위의 점이므로  
 $\left(\frac{1}{a}t^2\right)^2=-t$ ,  $t^3=-a^2$  ..... ㉢  
㉠, ㉡에서  $s^3=-8t^3$ ,  $s=-2t$ ,  $t=-\frac{1}{2}s$   
㉠에서  $\frac{s}{2a}=2\sqrt{2}$ ,  $s=4\sqrt{2}a$   
㉢에서  $(4\sqrt{2}a)^3=8a^2$ ,  $a=\frac{1}{16\sqrt{2}}$   
 $s=\frac{1}{4}$ ,  $t=-\frac{1}{8}$   
 $\overline{F_1P}+\overline{F_2Q}=|s-(-2)|+\left|\frac{1}{4}-t\right|$   
 $=\left|\frac{1}{4}-(-2)\right|+\left|\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right|=\frac{21}{8}$   
이므로  $p=8$ ,  $q=21$   
 $p+q=8+21=29$

30. [출제의도] 쌍곡선과 원의 관계를 추론하여 삼각형의 넓이를 구한다.



$\overline{F'Q}=k$  ( $k>0$ )이라 하자.  
점 Q가 선분  $F'P$ 를 1:2로 내분하므로  
 $\overline{QP}=2k$ ,  $\overline{F'P}=3k$   
점 P와 Q는 초점이  $F'$ ,  $F$ 이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이므로  $\overline{FP}=3k-6$ ,  $\overline{FQ}=k+6$   
 $\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 PQF에서  
 $(2k)^2+(3k-6)^2=(k+6)^2$ ,  $k=4$   
따라서  $\overline{PQ}=8$ ,  $\overline{FP}=6$ ,  $\overline{FQ}=10$   
 $\overline{QR}=t$  ( $t>0$ )이라 하면  $\overline{FR}=10-t$   
점 R은 초점이  $F'$ ,  $F$ 이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이므로  $\overline{F'R}=16-t$   
 $\angle F'QR=\theta$ 라 하자.  
 $\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{QP}}{\overline{FQ}}=\frac{4}{5}$ ,  $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ ,  $\sin\theta=\frac{3}{5}$   
삼각형 QF'R에서 코사인법칙에 의하여  
 $\cos\theta=\frac{4^2+t^2-(16-t)^2}{2\times 4\times t}=-\frac{4}{5}$ ,  $t=\frac{25}{4}$   
삼각형 QF'R의 넓이  $S$ 는  
 $S=\frac{1}{2}\times 4\times \frac{25}{4}\times \sin\theta=\frac{1}{2}\times 4\times \frac{25}{4}\times \frac{3}{5}=\frac{15}{2}$   
 $20S=150$