

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	④	3	④	4	①	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	③	10	①
11	②	12	⑤	13	②	14	④	15	⑤
16	③	17	⑤	18	①	19	④	20	①
21	②	22	6	23	4	24	29	25	23
26	8	27	11	28	20	29	13	30	154

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(1-3i)+2i=1+(-3i+2i)=1-i$ 이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(3x^2-5x+1)-(2x^2+x+3)$
 $=x^2-6x-2$ 이다.

3. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$P(x)=2x^3-x^2-x+4$ 라 하자. $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $P(1)$ 이므로 $P(1)=2-1-1+4=4$ 이다. 따라서 나머지는 4이다.

4. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가 $2 < x < 3$ 인 이차부등식은 $(x-2)(x-3) < 0$ 이다. $x^2-5x+6 < 0$ 이므로 $a=-5$ 이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$x(x-3)+(x+1)(x+3)$
 $=x^2-3x+x^2+4x+3$
 $=2x^2+x+3$
 이고, 주어진 등식은 x 에 대한 항등식이므로 좌변과 우변의 계수를 비교하면 $a=1$, $b=3$ 이다. 따라서 $ab=3$ 이다.

[다른 풀이]

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=3$ 이고, 주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $2-a+3=4$ 이므로 $a=1$ 이다. 따라서 $ab=3$ 이다.

6. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$(x+y-z)^2$
 $=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2y(-z)+2(-z)x$
 $=x^2+y^2+z^2+2(xy-yz-zx)$
 이므로 $5^2=x^2+y^2+z^2+2 \times 4$ 이다. 따라서 $x^2+y^2+z^2=17$ 이다.

7. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-22=0$ 이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식 $\frac{D}{4}=(-k)^2-1 \times (k^2+3k-22)=-3k+22 < 0$ 이다. 따라서 $k > \frac{22}{3}$ 이므로 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

8. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 x^4+x^2+1 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 나머지정리에 의해 $R=2^4+2^2+1=21$ 이다.

그러므로 $x^4+x^2+1=(x-2)Q(x)+21$ 에 $x=2024$ 를 대입하면 $2024^4+2024^2+1=(2024-2)Q(2024)+21$ 이다. 따라서 2024^4+2024^2+1 을 2022로 나눈 나머지는 21이다.

9. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-1| < n$ 의 해는 $-n+1 < x < n+1$ 이므로 정수 x 의 개수는 $(n+1)-(-n+1)-1=2n-1$ 이다. 따라서 $2n-1=9$ 이므로 $n=5$ 이다.

10. [출제의도] 사차방정식 문제 해결하기

$x^2-3x=X$ 라 하면 $X(X+6)+5=0$
 $X^2+6X+5=0$
 $(X+1)(X+5)=0$
 $(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)=0$
 이다. 이차방정식 $x^2-3x+5=0$ 은 서로 다른 두 허근을 가지고, 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 은 서로 다른 두 실근 α , β 를 가진다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta=1$ 이다.

11. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

x^3+2x^2+3x+6
 $=x^2(x+2)+3(x+2)$
 $=(x+2)(x^2+3)$
 이므로 $b=2$ 이다.
 x^3+xa+a 가 $x+2$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의해 $-8-2+a=0$ 이므로 $a=10$ 이다. 따라서 $a+b=12$ 이다.

12. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

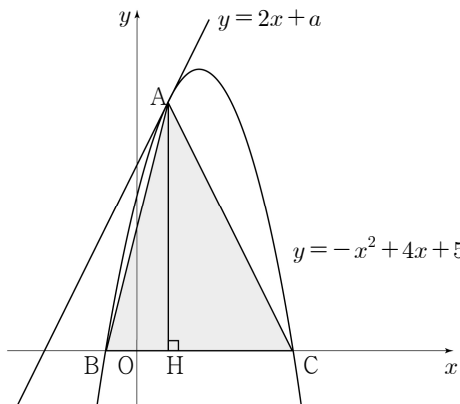
$x^3+x^2+x-3=0$ 에서 $(x-1)(x^2+2x+3)=0$ 이므로 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$ 의 두 허근 α , β 는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이다. 그러므로 $\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$ 이다. 따라서 $(\alpha^2+2\alpha+6)(\beta^2+2\beta+8)=(0+3)(0+5)=15$ 이다.

13. [출제의도] 연립방정식 이해하기

$x-y=3$ 에서 $y=x-3$ 이므로 $x^2-xy-y^2=k$ 에 대입하면 $x^2-x(x-3)-(x-3)^2=k$ 에서 $x^2-9x+k+9=0$ 이다. 이차방정식 $x^2-9x+k+9=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 $D=(-9)^2-4 \times 1 \times (k+9) > 0$ 이고 $45-4k > 0$, $k < \frac{45}{4}$ 이다. 따라서 자연수 k 의 최댓값은 11이다.

14. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이차함수 $y=-x^2+4x+5$ 의 그래프와 직선

$y=2x+a$ 가 한 점 A에서만 만나므로

$-x^2+4x+5=2x+a$,
 $x^2-2x+a-5=0 \dots \textcircled{1}$
 은 중근을 가진다.

판별식 $\frac{D}{4}=(-1)^2-1 \times (a-5)=0$ 에서 $a=6$ 이다.

$a=6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ 이므로 점 A의 x 좌표는 1이다. A(1, 8)이므로 $\overline{AH}=8$ 이다.

이차함수 $y=-x^2+4x+5$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는

이차방정식 $-x^2+4x+5=0$ 의 두 실근이다.
 $-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5)=0$ 이므로 B(-1, 0), C(5, 0)이고 $\overline{BC}=6$ 이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ 이다.

15. [출제의도] 인수분해 문제 해결하기

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$
 $=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)+k$
 $=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$
 $x^2+7x=X$ 라 하면 $(X+10)(X+12)+k=X^2+22X+120+k$ 가 완전제곱식이 되어야 하므로 $120+k=11^2=121$ 에서 $k=1$ 이다. $X^2+22X+121=(X+11)^2=(x^2+7x+11)^2=(x^2+ax+b)^2$
 이므로 $a=7$, $b=11$ 이다.

따라서 $a+b+k=7+11+1=19$ 이다.

[다른 풀이]

$x^2+7x+10=X$ 라 하면 $X(X+2)+k=X^2+2X+k$ 에서 $k=1$ 이다. $X^2+2X+1=(X+1)^2=(x^2+7x+11)^2=(x^2+ax+b)^2$
 이므로 $a=7$, $b=11$ 이다.

따라서 $a+b+k=7+11+1=19$ 이다.

16. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 x^3+ax^2+bx-4 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$ 이고 나머지는 3이므로 $x^3+ax^2+bx-4=(x+1)Q(x)+3 \dots \textcircled{1}$ 이다. $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-1+a-b-4=3$, $a-b=8$ 이다. $(x^2+a)Q(x-2)$ 가 $x-2$ 로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의해 $(4+a)Q(0)=0$ 이다. $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $-4=Q(0)+3$, $Q(0)=-7 \neq 0$ 이므로 $4+a=0$, $a=-4$ 이고 $a-b=8$ 이므로 $b=-12$ 이다. $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1-4-12-4=2Q(1)+3$ 이다. 따라서 $Q(1)=-11$ 이다.

17. [출제의도] 복소수 이해하기

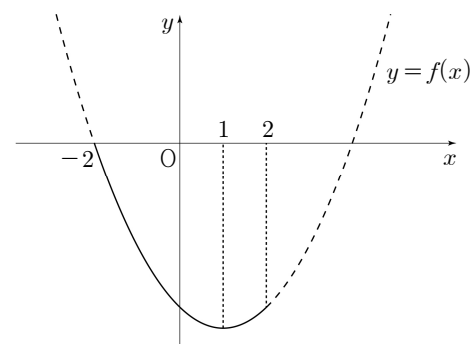
$z^2=(a^2-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i-(a-1)^2$
 $=(a^2-1)^2-(a-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i$
 가 음의 실수이므로 허수부분 $2(a^2-1)(a-1)=2(a+1)(a-1)^2=0$ 이다. 그러므로 $a=-1$ 또는 $a=1$ 이다. $a=-1$ 이면 $z^2=-4$, $a=1$ 이면 $z^2=0$ 에서 z^2 은 음의 실수이므로 $a=-1$ 이다. $a=-1$ 을 $z=a^2-1+(a-1)i$ 에 대입하면 $z=-2i$

이고, $\frac{(z-\bar{z})i}{4} = \frac{\{-2i-(2i)\}i}{4} = \frac{(-4i)i}{4} = 1$ 이므로
 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$ 이다. $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 라 하면
 $\alpha^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i$
 $\alpha^3 = \alpha^2\alpha = (-i) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^4 = \alpha^2\alpha^2 = (-i) \times (-i) = -1$
 $\alpha^5 = \alpha^4\alpha = (-1) \times \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^6 = \alpha^4\alpha^2 = (-1) \times (-i) = i$
 $\alpha^7 = \alpha^4\alpha^3 = (-1) \times \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^8 = \alpha^4\alpha^4 = (-1) \times (-1) = 1$
 $\alpha^8 = 1$ 이므로
 $\alpha = \alpha^9 = \alpha^{17} = \dots = \alpha^{97} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^2 = \alpha^{10} = \alpha^{18} = \dots = \alpha^{98} = -i$
 $\alpha^3 = \alpha^{11} = \alpha^{19} = \dots = \alpha^{99} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^4 = \alpha^{12} = \alpha^{20} = \dots = \alpha^{100} = -1$
 $\alpha^5 = \alpha^{13} = \alpha^{21} = \dots = \alpha^{93} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^6 = \alpha^{14} = \alpha^{22} = \dots = \alpha^{94} = i$
 $\alpha^7 = \alpha^{15} = \alpha^{23} = \dots = \alpha^{95} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 $\alpha^8 = \alpha^{16} = \alpha^{24} = \dots = \alpha^{96} = 1$
이다.
따라서 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$ 이 되도록 하는 100 이하의
자연수 n 은 8의 배수이므로 n 의 개수는 12 이다.

18. [출제의도] 이차함수 문제 해결하기

$f(x) = \left(x - \frac{2a-b}{2}\right)^2 + a^2 - 4b - \left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$ 이므로
 $x = \frac{2a-b}{2}$ 에서 최솟값을 가진다.

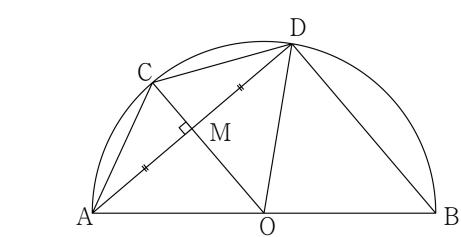
조건 (가)에 의해 $\frac{2a-b}{2} = 1$ 이므로 $b = 2a - 2$ 이다.
그러므로 $f(x) = x^2 - 2x + a^2 - 8a + 8$ 이다.
이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축이 $x = 1$ 이므로
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-2)$ 이다.
조건 (나)에 의해 $f(-2) = 0$ 이므로 이차함수 $y = f(x)$
의 그래프는 다음과 같다.



$f(-2) = 4 + 4 + a^2 - 8a + 8 = (a-4)^2 = 0$
에서 $a = 4$ 이고 $b = 2a - 2$ 이므로 $b = 6$ 이다.
따라서 $a + b$ 의 값은 10 이다.

19. [출제의도] 다항식의 연산 문제 해결하기

선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가
만나는 점을 M이라 하자.
 $\triangle AOC \equiv \triangle DOC$ 이므로 $\angle ACO = \angle DCO$ 이다.
 \overline{CM} 이 $\angle ACD$ 의 이등분선이고 $\triangle ACD$ 가
 $\overline{AC} = \overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AM} = \overline{DM}$,
 $\angle AMC = 90^\circ$ 이다.



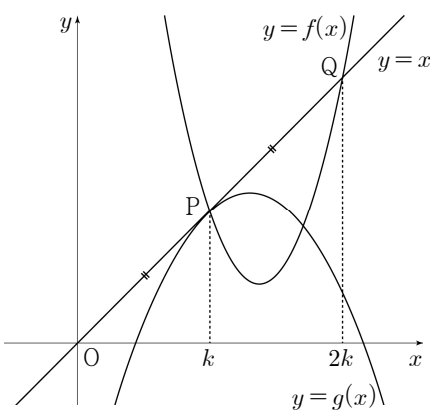
$\angle ADB = 90^\circ$ 이고 $\triangle AMO \sim \triangle ADB$, $\overline{BD} = 8$
이므로 $\overline{OM} = 4$ 이다.
직각삼각형 AMC에서 $\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CM}^2$,
직각삼각형 AMO에서 $\overline{AM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OM}^2$ 이므로
 $\overline{AC}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OM}^2$ 이다.
그러므로 $(a-1)^2 - (a-4)^2 = a^2 - 4^2$,
 $a^2 - 6a - 1 = 0$ 에서 $a > 4$ 이므로 $a = 3 + \sqrt{10}$ 이다.
 $a^2 - 6a - 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면 $a - \frac{1}{a} = 6$ 이다.
따라서
 $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 6^3 + 3 \times 6 = 234$
이다.

20. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$x^3 - (a^2 + a - 1)x^2 - a(a-3)x + 4a$
 $= (x+1)\{x^2 - a(a+1)x + 4a\} = 0$ 이므로 $x = -1$ 은
주어진 삼차방정식의 한 실근이다.
i) $\alpha = -1$ 인 경우
 $-1 \times \gamma = -4$ 에서 $\gamma = 4$ 이므로 $-1 < \beta < 4$ 이다.
이차방정식 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 의 두 근이 $\beta, 4$
이므로 근과 계수의 관계에 의해 $4\beta = 4a$ 에서
 $\beta = a$ 이다.
 $\gamma = 4$ 를 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 에 대입하면
 $16 - 4a^2 = 0$ 에서 $a = \pm 2$ 이다.
① $a = -2$ 인 경우
 $\beta = -2$ 이므로 $-1 < \beta < 4$ 를 만족시키지 않는다.
② $a = 2$ 인 경우
 $\beta = 2$ 이므로 $-1 < \beta < 4$ 를 만족시킨다.
①, ②에 의해 $a = 2$ 이다.
ii) $\beta = -1$ 인 경우
 α, γ 는 이차방정식 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 의 두 근
이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\gamma = 4a = -4$ 에서
 $a = -1$ 이다. $a = -1$ 을 $x^2 - a(a+1)x + 4a = 0$ 에
대입하면 $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ 이다.
 $\alpha = -2$, $\gamma = 2$ 이므로 $\alpha < \beta < \gamma$ 를 만족시킨다.
iii) $\gamma = -1$ 인 경우
 $\alpha \times (-1) = -4$ 에서 $\alpha = 4$ 이므로 $\alpha < \beta < \gamma$ 를 만족
시키지 않는다.
따라서 i), ii), iii)에 의해 $a = 2$ 또는 $a = -1$
이므로 모든 a 의 값의 합은 1 이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
추론하기

조건 (다)에 의해 점 P의 x 좌표를 k ($k > 0$)이라
하면 점 Q의 x 좌표는 $2k$ 이므로 $y = f(x)$, $y = g(x)$,
 $y = x$ 의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



조건 (가)에 의해 이차방정식 $f(x) = x$ 는 $k, 2k$ 를
두 근으로 가지므로
 $f(x) - x = 2(x-k)(x-2k)$,
 $f(x) = 2(x-k)(x-2k) + x$ 이다.
조건 (나)에 의해 이차방정식 $g(x) = x$ 는 k 를 중근
으로 가지므로
 $g(x) - x = -(x-k)^2$, $g(x) = -(x-k)^2 + x$ 이다.
그러므로
 $f(x) + g(x) = 2(x-k)(x-2k) + x - (x-k)^2 + x$
 $= x^2 + 2(1-2k)x + 3k^2$
이다.
이차부등식 $x^2 + 2(1-2k)x + 3k^2 \geq 0$ 의
해가 모든 실수이므로
이차방정식 $x^2 + 2(1-2k)x + 3k^2 = 0$ 의 판별식
 $\frac{D}{4} = (1-2k)^2 - 1 \times 3k^2 = k^2 - 4k + 1 \leq 0$ 이고
 $2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3}$ 이다.
따라서 점 P의 x 좌표의 최댓값은 $2 + \sqrt{3}$ 이다.

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(2x+y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$ 이다.
따라서 xy^2 의 계수는 6 이다.

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 계산하기

이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 에서 근과 계수의 관계에
의해 $1 + b = 3$, $1 \times b = a$ 이다.
따라서 $a = 2$, $b = 2$ 이므로 $ab = 4$ 이다.

24. [출제의도] 복소수 이해하기

복소수 z 를 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $3z - 2\bar{z} = 3(a+bi) - 2(a-bi) = a + 5bi$
이다.
 $a + 5bi = 5 + 10i$ 에서 $a = 5$, $b = 2$ 이므로
 $z = 5 + 2i$, $\bar{z} = 5 - 2i$
이다.
따라서 $z\bar{z} = (5+2i)(5-2i) = 5^2 + 2^2 = 29$ 이다.

25. [출제의도] 다항식의 나눗셈 이해하기

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \overline{) \begin{array}{r} x^2 - 3 \\ x^4 + 2x^3 \\ x^4 + 2x^3 + 3x^2 \end{array}} \\ \underline{ - 3x^2 + 11x - 4} \\ - 3x^2 + 6x - 9 \\ 17x + 5 \end{array}$$

이므로 $Q(x) = x^2 - 3$, $R(x) = 17x + 5$ 이다.
따라서 $Q(2) = 1$, $R(1) = 22$ 이고
 $Q(2) + R(1) = 1 + 22 = 23$ 이다.

26. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{5}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{k}{3} \text{ 이다.} \\ (3\alpha - k)(\alpha - 1) + (3\beta - k)(\beta - 1) \\ &= 3\alpha^2 - (k+3)\alpha + k + 3\beta^2 - (k+3)\beta + k \\ &= 3(\alpha^2 + \beta^2) - (k+3)(\alpha + \beta) + 2k \\ &= 3\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} - (k+3)(\alpha + \beta) + 2k \\ &= \frac{25}{3} - 2k - \frac{5}{3}(3+k) + 2k \\ &= -10 \\ 5k &= 40 \text{ 이다.} \\ \text{따라서 } k &= 8 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

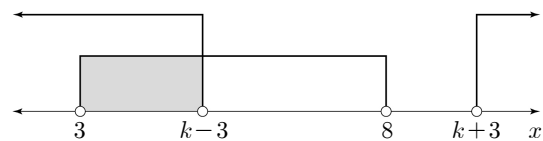
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{5}{3} \text{ 이다.} \\ 3\alpha^2 + k &= 5\alpha, \quad 3\beta^2 + k = 5\beta \text{ 이므로} \\ (3\alpha - k)(\alpha - 1) + (3\beta - k)(\beta - 1) \\ &= 3\alpha^2 - (k+3)\alpha + k + 3\beta^2 - (k+3)\beta + k \end{aligned}$$

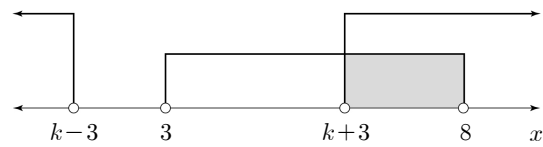
$$\begin{aligned}
 &= 3\alpha^2 + k - (k+3)\alpha + 3\beta^2 + k - (k+3)\beta \\
 &= 5\alpha - (k+3)\alpha + 5\beta - (k+3)\beta \\
 &= 5(\alpha + \beta) - (k+3)(\alpha + \beta) \\
 &= (\alpha + \beta)(2 - k) \\
 &= \frac{5}{3}(2 - k) \\
 &= -10 \\
 &\text{이고 } 2 - k = -6 \text{ 이다.} \\
 &\text{따라서 } k = 8 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

27. [출제의도] 연립부등식 문제 해결하기

$$\begin{aligned}
 x^2 - 11x + 24 &= (x-3)(x-8) < 0 \text{ 이므로} \\
 3 < x < 8 \text{ 이다.} \\
 x^2 - 2kx + k^2 - 9 &= x^2 - 2kx + (k-3)(k+3) \\
 &= \{x - (k-3)\} \{x - (k+3)\} > 0 \text{ 이므로} \\
 x < k-3 \text{ 또는 } x > k+3 \text{ 이다.} \\
 \text{i) } 3 < k-3 < 8 \text{ 인 경우} \\
 k > 6 \text{ 이므로 } k+3 > 9 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$



연립부등식의 해가 $3 < x < k-3$ 이므로
 $(k-3) - 3 = 2$, $k = 8$ 이다.
 ii) $3 < k+3 < 8$ 인 경우
 $k < 5$ 이므로 $k-3 < 2$ 이다.



연립부등식의 해가 $k+3 < x < 8$ 이므로
 $8 - (k+3) = 2$, $k = 3$ 이다.
 따라서 i), ii)에 의해 모든 k 의 값의 합은
 $8 + 3 = 11$ 이다.

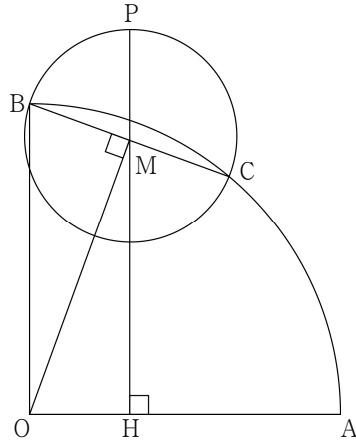
28. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이용하여 다항식 추론하기

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) \text{ 를 } f(x) - 2x^2 \text{ 으로 나누었을 때의 몫은} \\
 x^2 - 3x + 3 \text{ 이고 나머지는 } f(x) + xg(x) \text{ 이므로} \\
 f(x)g(x) &= \{f(x) - 2x^2\}(x^2 - 3x + 3) + f(x) + xg(x) \quad \text{㉠} \\
 &\text{이다.} \\
 \text{㉠의 좌변이 삼차식이므로 우변도 삼차식이다.} \\
 \{f(x) - 2x^2\}(x^2 - 3x + 3) \text{ 이 삼차식이므로} \\
 f(x) - 2x^2 \text{ 은 일차식이고} \\
 \text{나머지 } f(x) + xg(x) \text{ 는 상수이다.} \\
 f(x) - 2x^2 &= ax + b \text{ 라 하면} \\
 \text{나머지 } f(x) + xg(x) &= (2x^2 + ax + b) + xg(x) \text{ 는} \\
 \text{상수이므로 } g(x) &= -2x - a \text{ 이고 } f(x) + xg(x) = b \text{ 이다.} \\
 \text{㉠에 } f(x) = 2x^2 + ax + b, \quad g(x) = -2x - a \text{ 를} \\
 \text{대입하면} \\
 (2x^2 + ax + b)(-2x - a) &= (ax + b)(x^2 - 3x + 3) + b \quad \text{㉡} \\
 &\text{이다.} \\
 \text{㉡의 좌변의 최고차항의 계수가 } -4 \text{ 이므로 } a &= -4 \text{ 이다.} \\
 \text{㉡의 양변에 } x = 2 \text{ 를 대입하면} \\
 0 &= (-8 + b) \times 1 + b \text{ 에서 } b = 4 \text{ 이다.} \\
 \text{따라서 } f(x) &= 2x^2 - 4x + 4 \text{ 이므로 } f(-2) = 20 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

선분 BC의 중점을 M이라 하고 점 M을 지나고 직선 OB에 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 H라 하자.
 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형 OBC에서

점 M이 선분 BC의 중점이므로 $\angle OMB = 90^\circ$ 이다.



삼각형 OAP의 넓이 $S(x)$ 는

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PH} \\
 &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times (\overline{MH} + \overline{PM}) \quad \text{㉠}
 \end{aligned}$$

이다.

$$\overline{PM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = \frac{x}{2} \text{ 이므로}$$

직각삼각형 OMB에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OM}^2 &= \overline{OB}^2 - \overline{BM}^2 \\
 &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

$\angle OMH = \angle BOM$ 이므로

$\triangle OHM \sim \triangle BMO$

이다. 그러므로

$$\overline{MH} : \overline{OM} = \overline{OM} : \overline{OB} = \overline{OM} : 1 \text{ 이고}$$

$$\overline{MH} = \overline{OM}^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \quad \text{㉡}$$

이다. ㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{5}{8} \quad (0 < x < \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

$S(x)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{8}$ 이므로 $p = 8$, $q = 5$ 이다.

따라서 $p + q = 13$ 이다.

30. [출제의도] 이차함수 추론하기

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이므로
 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이고 최댓값은
 0보다 작거나 같다.

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로
 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값은
 0보다 크거나 같다.

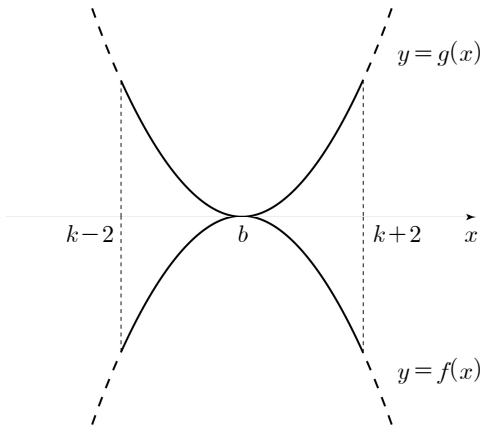
조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 함수 $g(x)$ 의
 최솟값이 같아지기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최댓값과
 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 모두 0이어야 한다. 그러므로

$$f(x) = a(x-b)^2 \quad (a < 0) \quad \text{㉠}$$

$$g(x) = c(x-d)^2 \quad (c > 0) \quad \text{㉡}$$

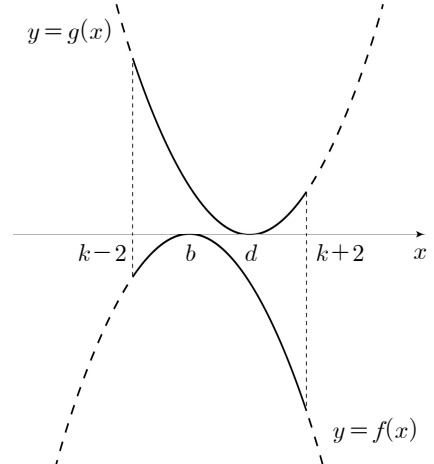
이라 하자.

i) $b = d$ 인 경우



$k-2 \leq b \leq k+2$ 에서 $b-2 \leq k \leq b+2$ 이므로 k 의
 최솟값이 0, 최댓값이 1이 되도록 하는 실수 b 는
 존재하지 않는다.

ii) $b < d$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1이고

$k-2 \leq b$, $d \leq k+2$ 에서 $d-2 \leq k \leq b+2$ 이므로
 $b = -1$, $d = 2$ 이다.

㉠에 $b = -1$ 을 대입하고 ㉡에 $d = 2$ 를 대입하면

$$f(x) = a(x+1)^2, \quad g(x) = c(x-2)^2 \text{ 이다.}$$

방정식 $f(x) = f(0)$ 은 $a(x+1)^2 = a$ 이고

$(x+1)^2 = 1$, $x^2 + 2x = 0$ 에서 모든 실근의 합은
 -2 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

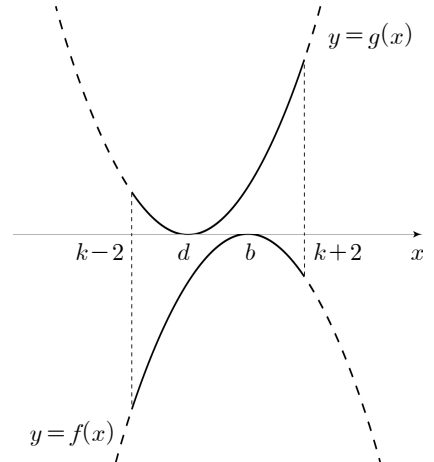
$$f(1) = 4a = -2 \text{ 에서 } a = -\frac{1}{2} \text{ 이고 } g(1) = c = 2 \text{ 이다.}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2, \quad g(x) = 2(x-2)^2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = -8, \quad g(11) = 162 \text{ 이다.}$$

그러므로 $f(3) + g(11) = 154$ 이다.

iii) $d < b$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1이고

$k-2 \leq d$, $b \leq k+2$ 에서 $b-2 \leq k \leq d+2$ 이므로
 $b = 2$, $d = -1$ 이다.

㉠에 $b = 2$ 를 대입하고 ㉡에 $d = -1$ 을 대입하면

$$f(x) = a(x-2)^2, \quad g(x) = c(x+1)^2 \text{ 이다.}$$

방정식 $f(x) = f(0)$ 은 $a(x-2)^2 = 4a$ 이고

$(x-2)^2 = 4$, $x^2 - 4x = 0$ 에서 모든 실근의 합은
 4이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 i), ii), iii)에 의해 $f(3) + g(11) = 154$ 이다.

[참고] 조건 (다)에 의해 b 는 음수이므로 함수
 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

