

수학 영역

정답

|    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|
| 1  | ④  | 2  | ④  | 3  | ①  | 4  | ⑤ | 5  | ③  |
| 6  | ⑤  | 7  | ②  | 8  | ①  | 9  | ③ | 10 | ②  |
| 11 | ⑤  | 12 | ④  | 13 | ①  | 14 | ④ | 15 | ②  |
| 16 | 11 | 17 | 50 | 18 | 37 | 19 | 2 | 20 | 35 |
| 21 | 8  | 22 | 96 |    |    |    |   |    |    |

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$\sqrt[3]{16} \times 2^{-\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2$$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 4x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 9$$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 = \frac{5}{4} \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로 } \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 + 3 = 5$$

5. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

함수  $f(x)$  는  $f'(x)$  의 부정적분이므로

$$\int_1^2 f'(x) dx = [f(x)]_1^2 = f(2) - f(1)$$

모든 실수  $x$  에 대하여

$$f(x) - f(1) = x^3 + 4x^2 - 5x$$

$x = 2$  일 때,

$$f(2) - f(1) = 2^3 + 4 \times 2^2 - 5 \times 2 = 14$$

$$\text{따라서 } \int_1^2 f'(x) dx = 14$$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$  ( $a > 0$ ), 공비를  $r$  ( $r > 0$ ) 이라 하자.

$$a_n = ar^{n-1} \text{ (단, } n \text{ 은 자연수)}$$

$$a_1 + a_2 = a + ar$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{r^2(a + ar)}{a + ar} = r^2 = 4, \quad r = 2 \quad (r > 0)$$

$$a_2 a_4 = a^2 r^4 = 16a^2 = 1, \quad a = \frac{1}{4} \quad (a > 0)$$

$$a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}, \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 16$$

$$\text{따라서 } a_6 + a_7 = 24$$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

함수  $f(x)$  의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |      |            |     |            |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$     | $\dots$    | $-1$ | $\dots$    | $1$ | $\dots$    |
| $f'(x)$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 극대   | $\searrow$ | 극소  | $\nearrow$ |

함수  $f(x)$  는  $x = -1$  에서 극댓값을 갖고,

$x = 1$  에서 극솟값을 갖는다.

$$f(1) = 1 - 3 + 2a = a + 3 \text{ 이므로 } a = 5$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 10$$

$$\text{따라서 } f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 10 = 12$$

8. [출제의도] 부정적분의 성질 이해하기

모든 실수  $x$  에 대하여

$$xf'(x) = 6x^3 - x + f(0) + 1$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } 0 = f(0) + 1$$

$$f(0) = -1$$

$$xf'(x) = 6x^3 - x + (-1) + 1 = x(6x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 1$$

$$f(x) = 2x^3 - x + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)}$$

$$f(0) = C = -1$$

$$f(x) = 2x^3 - x - 1$$

$$\text{따라서 } f(-1) = -2 + 1 - 1 = -2$$

9. [출제의도] 지수와 로그의 성질 이해하기

삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{0 + 2a + (-\log_2 9)}{3}, \frac{(-\log_2 9) + \log_2 7 + a}{3} \right)$$

$$\frac{0 + 2a + (-\log_2 9)}{3} = b, \quad 2a - \log_2 9 = 3b$$

$$b = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}\log_2 9 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\frac{(-\log_2 9) + \log_2 7 + a}{3} = \log_8 7 = \frac{1}{3} \log_2 7$$

$$-\log_2 9 + \log_2 7 + a = \log_2 7$$

$$a = \log_2 9 \quad \cdots \text{㉡}$$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$$b = \frac{2}{3}\log_2 9 - \frac{1}{3}\log_2 9 = \frac{1}{3}\log_2 9$$

$$a + 3b = \log_2 9 + \log_2 9 = \log_2 81$$

$$2^{a+3b} = 2^{\log_2 81}$$

$$2^{\log_2 81} = 81 \text{ 라 하면}$$

$$\log_2 k = \log_2 81, \quad k = 81$$

$$\text{따라서 } 2^{a+3b} = 81$$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 점 P의 위치를  $x(t)$ 라 하자.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt$$

$$= 16 + \int_0^t 3t(a-t) dt$$

$$= 16 + \int_0^t (-3t^2 + 3at) dt$$

$$= 16 + \left[ -t^3 + \frac{3}{2}at^2 \right]_0^t$$

$$= -t^3 + \frac{3}{2}at^2 + 16$$

시각  $t = 2a$ 에서 점 P의 위치가 0 이므로

$$x(2a) = -(2a)^3 + \frac{3}{2}a \times (2a)^2 + 16$$

$$= 16 - 2a^3 = 0$$

$$a^3 = 8, \quad a = 2$$

$$v(t) = 3t(2-t) = -3t^2 + 6t$$

따라서 시각  $t = 0$ 에서  $t = 5$ 까지

점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^5 |-3t^2 + 6t| dt$$

$$= \int_0^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^5 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= [-t^3 + 3t^2]_0^2 + [t^3 - 3t^2]_2^5$$

$$= \{(-8 + 12) - 0\} + \{(125 - 75) - (8 - 12)\}$$

$$= 58$$

11. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ 라 하자.

$$a_n = a + (n-1)d \text{ (단, } n \text{ 은 자연수)}$$

$$a_5 = a + 4d \text{ 는 자연수이다.}$$

$$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 4(2a+7d) = \frac{68}{3}$$

$$2a + 7d = \frac{17}{3}$$

$$2(a + 4d) - d = 2a_5 - d = \frac{17}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}d + \frac{17}{6}$$

$$0 < d < 1 \text{ 이므로 } \frac{17}{6} < a_5 < \frac{10}{3}$$

$$a_5 = 3, \quad d = \frac{1}{3}$$

$$a_5 = a + 4 \times \frac{1}{3} = 3, \quad a = \frac{5}{3}$$

$$a_n = \frac{5}{3} + (n-1) \times \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_{16} = \frac{5}{3} + 15 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수  $f(x)$ 가  $x = 4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

$4 \leq x < 8$ 에서의 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는  
 $0 \leq x < 4$ 에서의 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를  
 $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 16만큼  
평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x+4) = f(x) + 16 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x+4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + 16\} = 0 + 16 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4-} (x^3 + ax^2 + bx) \\ &= 64 + 16a + 4b \end{aligned}$$

$$f(4) = f(0) + 16 = 16$$

$$16 = 64 + 16a + 4b$$

$$b = -4a - 12$$

함수  $f(x)$ 가  $x = 4$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x+4) - f(4)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{f(x) + 16\} - 16}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + ax + b) = b = -4a - 12 \end{aligned}$$

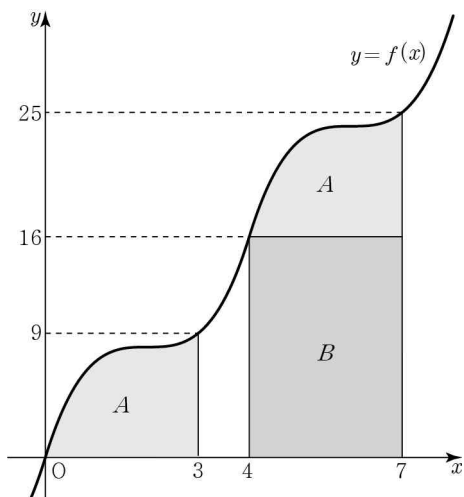
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{(x^3 + ax^2 + bx) - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x^3 + ax^2 + (-4a - 12)x - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{ax(x-4) + (x-4)(x^2 + 4x + 4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \{x^2 + (a+4)x + 4\} = 4a + 36 \end{aligned}$$

$$-4a - 12 = 4a + 36$$

$$a = -6, b = 12$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \quad (0 \leq x < 4)$$

함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수  $y = f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축 및

직선  $x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $A$ ,

직선  $y = 16$ 과  $x$ 축 및 두 직선  $x = 4$ ,  $x = 7$ 로

둘러싸인 부분의 넓이를  $B$ 라 하면

$$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 12x)dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 \right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$B = 3 \times 16 = 48$$

$$\text{따라서 } \int_4^7 f(x)dx = A + B = \frac{81}{4} + 48 = \frac{273}{4}$$

### 13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC의 외접원을  $C_1$ ,

삼각형 ADC의 외접원을  $C_2$ 라 하자.

원  $C_1$ 의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R, \quad R = 9$$

원  $C_2$ 에서  $\angle AO'D$ 는 호 AD의 중심각,

$\angle ACD$ 는 호 AD의 원주각이므로

$$\angle AO'D = 2\angle ACD = \frac{2}{3}\pi$$

이등변삼각형  $O'AD$ 에서  $\angle AO'D = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\angle DAO' = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{OA} = R = 9, \quad \overline{AO'} = 5\sqrt{3}$$

$$\angle OAO' = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

삼각형  $AOO'$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{OO'}^2 &= 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 81 + 75 - 135 = 21 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \overline{OO'}^2 = 21$$

### 14. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(-2) = g(-2) = 2$ ,  $f(0) = g(0) = 2$ 이므로

삼차방정식  $g(x) = 2$ 의 서로 다른 세 실근을

$-2$ ,  $0$ ,  $t$ 라 하면

$$g(x) - 2 = x(x+2)(x-t)$$

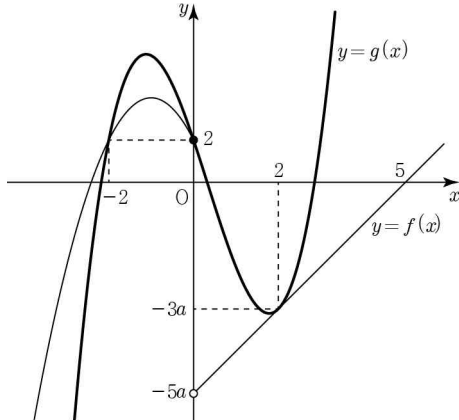
$$g(x) = x(x+2)(x-t) + 2$$

$$= x^3 + (2-t)x^2 - 2tx + 2$$

$f(k) = g(k)$ 를 만족시키는 양수  $k$ 의 값은

2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수  $y = f(x)$ ,

$y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x > 0$ 에서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 곡선

$y = g(x)$  위의 점  $(2, g(2))$ 에서의 접선과

일치한다.

$$f(2) = g(2) \text{ 이고 } f'(2) = g'(2)$$

$$f(2) = a(2-5) = -3a$$

$$g(2) = 8 + 4(2-t) - 4t + 2 = 18 - 8t$$

$$-3a = 18 - 8t \quad \cdots \text{㉠}$$

$$f'(2) = g'(2) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = a \quad (x > 0) \text{에서}$$

$$f'(2) = a$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2(2-t)x - 4t \text{에서}$$

$$g'(2) = 20 - 6t$$

$$a = 20 - 6t \quad \cdots \text{㉡}$$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면  $a = 2$ ,  $t = 3$

$$g(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$$

$$\text{따라서 } g(2a) = g(4) = 26$$

### 15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_1$ 이 자연수이고 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = (a_n - 1)^2 \text{ 이므로}$$

수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.

$a_{n+1}$ 의 값에 따라 가능한  $a_n$ 의 값은 다음과 같다.

(I)  $a_{n+1} = (2k)^2$ 인 자연수  $k$ 가 존재하는 경우

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}} + 1 \text{ 또는 } a_n = 2a_{n+1}$$

(II)  $a_{n+1} = 1$ 인 경우,  $a_n = 0$  또는  $a_n = 2$

(III)  $a_{n+1} = 0$ 인 경우,  $a_n = 1$

(IV) 그 외의 경우,  $a_n = 2a_{n+1}$

(I)~(IV)에 의하여

$$a_7 = 1 \text{ 이므로 } a_6 = 0 \text{ 또는 } a_6 = 2$$

(i)  $a_6 = 0$ 인 경우

$$a_5 = 1 \text{ 이고 순서쌍 } (a_4, a_3, a_2, a_1) \text{은}$$

$$(0, 1, 0, 1) \text{ 또는 } (0, 1, 2, 4) \text{ 또는}$$

$$(2, 4, 3, 6) \text{ 또는 } (2, 4, 8, 16) \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 1 \text{ 또는 } a_1 = 4 \text{ 또는 } a_1 = 6 \text{ 또는}$$

$$a_1 = 16$$

(ii)  $a_6 = 2$ 인 경우

$$a_5 = 4 \text{ 이고 순서쌍 } (a_4, a_3, a_2, a_1) \text{은}$$

$$(3, 6, 12, 24) \text{ 또는 } (8, 16, 5, 10) \text{ 또는}$$

$$(8, 16, 32, 64) \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 24 \text{ 또는 } a_1 = 10 \text{ 또는 } a_1 = 64$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든  $a_1$ 의 값의 합은

$$1 + 4 + 16 + 6 + 24 + 10 + 64 = 125$$

### 16. [출제의도] 로그 계산하기

로그의 진수는 양수이므로

$$x + 9 > 0, \quad x - 6 > 0 \text{에서}$$

$$x > 6$$

$$\log_5(x+9) = \log_5 4 + \log_5(x-6)$$

$$\log_5(x+9) = \log_5\{4(x-6)\} = \log_5(4x-24)$$

$$x + 9 = 4x - 24$$

$$\text{따라서 } x = 11$$

### 17. [출제의도] 곱의 미분 계산하기

$$f(x) = (x-3)(x^2+x-2)$$

$$f'(x) = 1 \times (x^2+x-2) + (x-3)(2x+1)$$

따라서

$$\begin{aligned} f'(5) &= 1 \times (25 + 5 - 2) + (5 - 3) \times (10 + 1) \\ &= 50 \end{aligned}$$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2) &= 3\sum_{k=1}^{15}a_k + \sum_{k=1}^{15}2 \\ &= 3\sum_{k=1}^{15}a_k + 30 = 45\end{aligned}$$

$$3\sum_{k=1}^{15}a_k = 15, \quad \sum_{k=1}^{15}a_k = 5$$

$$2\sum_{k=1}^{15}a_k = 42 + \sum_{k=1}^{14}a_k$$

$$10 = 42 + \sum_{k=1}^{14}a_k, \quad \sum_{k=1}^{14}a_k = -32$$

$$\text{따라서 } a_{15} = \sum_{k=1}^{15}a_k - \sum_{k=1}^{14}a_k = 5 - (-32) = 37$$

19. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수  $y = a \sin \pi x$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ ,

최댓값은  $a$ , 최솟값은  $-a$ 이다.

삼각함수  $y = a \cos \pi x$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ ,

최댓값은  $a$ , 최솟값은  $-a$ 이다.

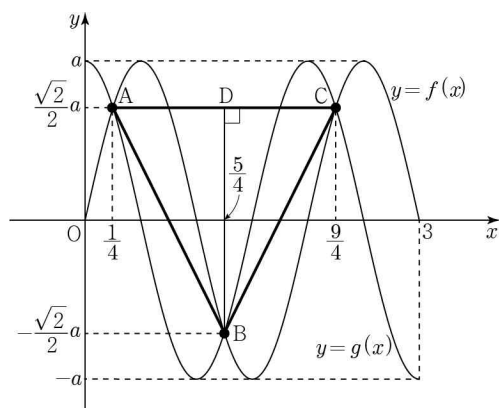
곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = g(x)$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는 방정식  $f(x) = g(x)$ 의 실근이므로

$$a \sin \pi x = a \cos \pi x, \quad \tan \pi x = 1$$

$$\pi x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi \quad (0 \leq \pi x \leq 3\pi)$$

$$x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}$$

곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을  $A\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ ,  $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ ,  $C\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$$\overline{AC} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \sqrt{2}a$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2}a = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a^2 = 2$$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

직선  $y = k$ 가 곡선  $y = f(x)$ , 직선  $y = g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이므로

함수  $y = h(x)$ 의 그래프와 직선  $y = k$ 가

서로 다른 네 점에서 만나는 경우는

직선  $y = k$ 와 곡선  $y = f(x)$ 는

서로 다른 세 점에서 만나고

직선  $y = k$ 와 직선  $y = g(x)$ 는

한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

$$\text{함수 } h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

직선  $y = k$ 와 직선  $y = g(x)$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표를  $x_1$ 이라 하면  $f(x_1) < g(x_1)$

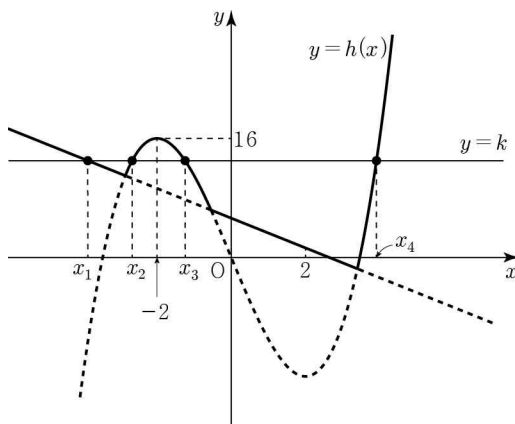
직선  $y = k$ 와 곡선  $y = f(x)$ 가 만나는

서로 다른 세 점의  $x$ 좌표를 작은 수부터

크기순으로  $x_2, x_3, x_4$ 라 하면

$$f(x_2) > g(x_2), f(x_3) > g(x_3), f(x_4) > g(x_4)$$

이를 만족시키는 함수  $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선  $y = g(x)$ 가 점  $(2, 2)$ 를 지나고

$x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) < g(x_1) = k$ 인 실수  $x_1$ 이

존재하므로 직선  $y = g(x)$ 의 기울기는 음수이다.

$$y = g(x) = a(x-2) + 2 \text{에서 } a < 0 \quad \text{㉠}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

함수  $f(x)$ 는  $x = -2$ 에서 극댓값을 갖고

$x = -2$ 에서 함수  $f(x)$ 의 함숫값은 함수

$g(x)$ 의 함숫값보다 크다.

$$f(-2) > g(-2)$$

$$16 > -4a + 2$$

$$a > -\frac{7}{2} \quad \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의하여 } -\frac{7}{2} < a < 0$$

$$m = -\frac{7}{2}, \quad M = 0$$

$$\text{따라서 } 10 \times (M - m) = 10 \times \left\{0 - \left(-\frac{7}{2}\right)\right\} = 35$$

21. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

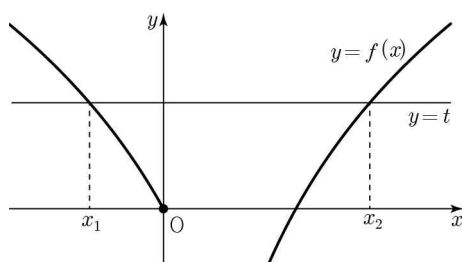
(i)  $m = -10$ 인 경우

$$f(0) = |10 - 10| = 0$$

$t > 0$ 일 때,

방정식  $5\log_2(4-x) - 10 = t$ 의 실근을  $x_1$ ,

방정식  $5\log_2 x - 10 = t$ 의 실근을  $x_2$ 라 하자.



$$5\log_2(4-x_1) - 10 = 5\log_2 x_2 - 10$$

$$\log_2(4-x_1) = \log_2 x_2$$

$$4-x_1 = x_2, \quad x_1 + x_2 = 4$$

$t > 0$ 인 모든 실수  $t$ 에 대하여

$g(t) = 4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $m < -10$ 인 경우

$x < 0$ 에서 곡선  $y = f(x)$ 가  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표를  $\alpha$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 5\log_2(4-x) + m & (x \leq \alpha) \\ -5\log_2(4-x) - m & (\alpha < x \leq 0) \\ 5\log_2 x + m & (x > 0) \end{cases}$$

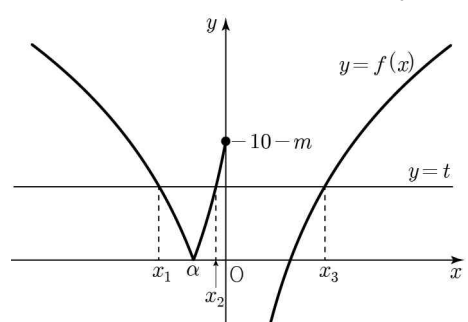
$$f(0) = |10 + m| = -10 - m$$

①  $0 < t < -10 - m$ 일 때,

방정식  $5\log_2(4-x) + m = t$ 의 실근을  $x_1$ ,

방정식  $-5\log_2(4-x) - m = t$ 의 실근을  $x_2$ ,

방정식  $5\log_2 x + m = t$ 의 실근을  $x_3$ 이라 하자.



$$5\log_2(4-x_1) + m = 5\log_2 x_3 + m$$

$$\log_2(4-x_1) = \log_2 x_3$$

$$4-x_1 = x_3, \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$g(t) = x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + 4 < 4 \text{ 이고}$$

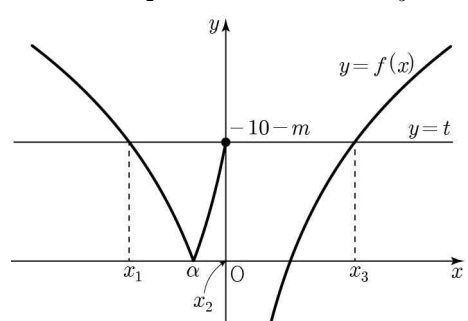
$g(t)$ 의 값은 일정하지 않다.

②  $t = -10 - m$ 일 때,

방정식  $5\log_2(4-x) + m = t$ 의 실근을  $x_1$ ,

방정식  $-5\log_2(4-x) - m = t$ 의 실근을  $x_2$ ,

방정식  $5\log_2 x + m = t$ 의 실근을  $x_3$ 이라 하자.



$$5\log_2(4-x_1) + m = 5\log_2 x_3 + m$$

$$\log_2(4-x_1) = \log_2 x_3, \quad 4-x_1 = x_3$$

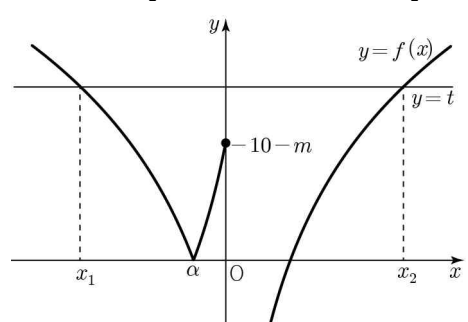
$$x_1 + x_3 = 4, \quad x_2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(t) = x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

③  $t > -10 - m$ 일 때,

방정식  $5\log_2(4-x) + m = t$ 의 실근을  $x_1$ ,

방정식  $5\log_2 x + m = t$ 의 실근을  $x_2$ 라 하자.



$$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2x_2+m$$

$$\log_2(4-x_1)=\log_2x_2$$

$$4-x_1=x_2, \quad x_1+x_2=4$$

$$g(t)=x_1+x_2=4$$

①, ②, ③에 의하여

$t \geq -10-m$  인 모든 실수  $t$  에 대하여

$$g(t)=4$$

( i ), ( ii)에 의하여

$t \geq a$  인 모든 실수  $t$  에 대하여

$g(t)=g(a)$  가 되도록 하는  $a$  의 최솟값은  $-10-m$  이다.

$$-10-m=2, \quad m=-12$$

따라서  $f(m)=f(-12)$

$$=|5\log_2(4+12)-12|$$

$$=8$$

## 22. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 함수 추론하기

함수  $f(x)$  는  $x=a$  와  $x=b$  에서만 불연속이고, 함수  $f(x+k)$  는  $x=a-k$  와  $x=b-k$  에서만 불연속이므로

함수  $f(x)f(x+k)$  가  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $x=a-k$ ,  $x=b-k$  에서 연속이면 함수  $f(x)f(x+k)$  는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a-k < a$ ,  $b-k < b$  이므로 두 수  $a$  와  $b-k$  에 대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

( i )  $a \neq b-k$  ( $k \neq b-a$ ) 인 경우

①  $x=a-k$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x)f(x+k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow (a-k)+} f(x+k) \\ = f(a-k) \times (a-10)$$

$$\lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x)f(x+k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow (a-k)-} f(x+k) \\ = f(a-k) \times (a+2)$$

$$f(a-k)f(a-k+k)=f(a-k) \times (a-10)$$

함수  $f(x)f(x+k)$  가  $x=a-k$  에서 연속이므로

$$f(a-k) \times (a-10) = f(a-k) \times (a+2)$$

$$f(a-k)=0$$

②  $x=a$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+k) = (a-10)f(a+k)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+k) = (a+2)f(a+k)$$

$$f(a)f(a+k) = (a-10)f(a+k)$$

함수  $f(x)f(x+k)$  가  $x=a$  에서 연속이므로

$$(a-10)f(a+k) = (a+2)f(a+k)$$

$$f(a+k)=0$$

③  $x=b-k$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow (b-k)+} f(x)f(x+k)$$

$$= f(b-k) \times (-b+8)$$

$$\lim_{x \rightarrow (b-k)-} f(x)f(x+k) = f(b-k) \times (b-10)$$

$$f(b-k)f(b-k+k) = f(b-k) \times (-b+8)$$

함수  $f(x)f(x+k)$  가  $x=b-k$  에서 연속이므로

$$f(b-k) \times (-b+8) = f(b-k) \times (b-10)$$

$$f(b-k)=0$$

④  $x=b$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow b+} f(x)f(x+k) = (-b+8)f(b+k)$$

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)f(x+k) = (b-10)f(b+k)$$

$$f(b)f(b+k) = (-b+8)f(b+k)$$

함수  $f(x)f(x+k)$  가  $x=b$  에서 연속이므로

$$(-b+8)f(b+k) = (b-10)f(b+k)$$

$$f(b+k)=0$$

① ~ ④에 의하여

$$f(a-k)=f(a+k)=f(b-k)=f(b+k)=0$$

$$a+k=b-k \quad (k=\frac{b-a}{2}) \text{ 이면}$$

$$a+k=b-k=\frac{a+b}{2}$$

$$a < \frac{a+b}{2} < b < 8 \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right) - 10 < 0$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a+k) = f(b-k) = 0 \text{ 을}$$

만족시키지 않는다.

$a+k \neq b-k$  이므로 네 수  $a-k$ ,  $a+k$ ,  $b-k$ ,  $b+k$  는 방정식  $f(x)=0$  의 서로 다른 네 실근이다.

방정식  $f(x)=0$  의 모든 실근은

$$-4, -2, 8, 10 \text{ 이므로}$$

$$\{a-k, a+k, b-k, b+k\} \\ = \{-4, -2, 8, 10\}$$

$$0 < a+k < b+k \text{ 이므로}$$

$$a+k=8, \quad b+k=10$$

$$a-k < b-k \text{ 이므로}$$

$$a-k=-4, \quad b-k=-2$$

두 식  $a-k=-4$ ,  $a+k=8$  을 연립하면

$$a=2, \quad k=6$$

$$b+k=b+6=10, \quad b=4$$

$$a < b < k \text{ 이므로}$$

$$f(k)=f(6)=|6-9|-1=2$$

$f(k) > 0$  이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

( ii )  $a=b-k$  ( $k=b-a$ ) 인 경우

①  $x=a-k$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

( i )의 ①에 의하여  $f(a-k)=0$

$$a-k=2a-b \text{ 이므로 } f(2a-b)=0$$

②  $x=b$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

( i )의 ④에 의하여  $f(b+k)=0$

$$b+k=2b-a \text{ 이므로 } f(2b-a)=0$$

③  $x=a(=b-k)$  에서 함수  $f(x)f(x+k)$  의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x+b-a)$$

$$= (a-10)(-b+8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x+b-a)$$

$$= (a+2)(b-10)$$

$$f(a)f(a+k)=f(a)f(b)=(a-10)(-b+8)$$

함수  $f(x)f(x+k)$  가

$x=a=b-k$  에서 연속이므로

$$(a-10)(-b+8) = (a+2)(b-10)$$

$$a(b-9)-4b+30=0$$

$$a=4+\frac{6}{b-9}$$

$a < b < 8$  이므로 이를 만족시키는

두 자연수  $a$ ,  $b$  의 순서쌍  $(a, b)$  는

$(1, 7)$ ,  $(2, 6)$  이다.

$$a=1, \quad b=7 \text{ 이면 } f(2a-b)=f(-5)=1$$

이므로  $f(2a-b)=0$  을 만족시키지 않는다.

$$a=2, \quad b=6 \text{ 이면}$$

$$f(2a-b)=f(-2)=0,$$

$$f(2b-a)=f(10)=0 \text{ 을 만족시킨다.}$$

$$k=6-2=4$$

$$a < k < b \text{ 이므로}$$

$$f(k)=f(4)=4-10=-6$$

$$f(k) < 0 \text{ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.}$$

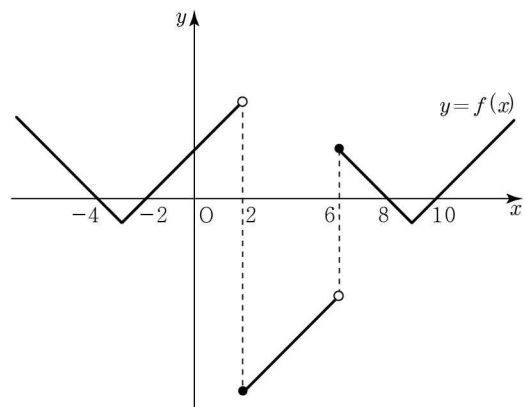
( i ), ( ii)에 의하여  $a=2$ ,  $b=6$ ,  $k=4$  이고 함수  $f(x)$  는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x < 2) \\ x-10 & (2 \leq x < 6) \\ |x-9|-1 & (x \geq 6) \end{cases}$$

따라서

$$f(a) \times f(b) \times f(k) = f(2) \times f(6) \times f(4) \\ = (-8) \times 2 \times (-6) = 96$$

[참고] 함수  $y=f(x)$  의 그래프



확률과 통계 정답

|    |   |    |    |    |     |    |   |    |   |
|----|---|----|----|----|-----|----|---|----|---|
| 23 | ③ | 24 | ④  | 25 | ⑤   | 26 | ④ | 27 | ② |
| 28 | ② | 29 | 70 | 30 | 198 |    |   |    |   |

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항정리 계산하기

다항식  $(2x+1)^5$ 의 전개식의 일반항은  ${}_5C_r \times (2x)^{5-r} \times 1^r = {}_5C_r \times 2^{5-r} \times x^{5-r}$   
 $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$   
 $r=3$ 일 때,  ${}_5C_3 \times 2^{5-3} \times x^{5-3} = 40x^2$   
 따라서  $x^2$ 의 계수는 40

24. [출제의도] 서로 독립인 두 사건의 성질 이해하기

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{3}{4}$   
 $P(A) = k$ 라 하면  
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로  
 $\frac{1}{2} = k \times \frac{3}{4}, k = \frac{2}{3}$   
 따라서  $P(A) = \frac{2}{3}$

[다른 풀이]  
 두 사건  $A, B$ 가 서로 독립이므로  
 두 사건  $A^c, B$ 도 서로 독립이다.

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}$   
 $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$   
 $= \{1 - P(A)\}P(B)$   
 $= P(B) - P(A)P(B)$   
 $= P(B) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{3}{4}$

따라서  $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

25. [출제의도] 이산확률변수의 평균 이해하기

이산확률변수의 확률분포의 성질에 의하여  
 확률의 합이 1이므로

$\frac{1}{3} + a + b = 1, a + b = \frac{2}{3}$   
 $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + a \times a + b \times b$   
 $= a^2 + b^2$

$E(X) = \frac{5}{18}$ 에서  $a^2 + b^2 = \frac{5}{18}$

따라서  $ab = \frac{1}{2} \{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\}$   
 $= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{5}{18} \right\} = \frac{1}{12}$

26. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에

들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.  
 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에  
 들어 있는 공의 개수가 0인 사건을  $A$ 라 하자.  
 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 모두 다를  
 확률은

$$P(A) = \frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

[다른 풀이]

시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에  
 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.  
 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에  
 들어 있는 공의 개수가 1 이상인 사건을  $A$ 라  
 하자.

(i) 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌  
 상자에 들어 있는 공의 개수가 1일 확률은  
 두 개의 눈의 수는 같고 하나는 다른 눈의  
 수가 나오는 확률과 같으므로

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_2C_1 \times \frac{3!}{2!}}{6^3} = \frac{5}{12}$$

(ii) 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌  
 상자에 들어 있는 공의 개수가 2일 확률은  
 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 모두  
 같은 사건의 확률과 같으므로

$$\frac{{}_6C_1}{6^3} = \frac{1}{36}$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$P(A) = \frac{5}{12} + \frac{1}{36} = \frac{4}{9}$$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍  $(p, q, r)$ 은  
 $(1, 2, 5)$  또는  $(1, 3, 4)$ 이다.

(i) 순서쌍  $(p, q, r)$ 이  $(1, 2, 5)$ 인 경우  
 8개의 문자 P, Q, Q, R, R, R, R, R을  
 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 5!} = 168$$

(ii) 순서쌍  $(p, q, r)$ 이  $(1, 3, 4)$ 인 경우  
 8개의 문자 P, Q, Q, Q, R, R, R, R을  
 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3! \times 4!} = 280$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$168 + 280 = 448$$

28. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

$a \times b + c + d$ 가 홀수인 사건을  $A$ ,  
 두 수  $a, b$ 가 모두 홀수인 사건을  $B$ 라 하자.  
 $a \times b + c + d$ 가 홀수인 경우는

$a \times b$ 가 홀수이고  $c + d$ 가 짝수인 경우 또는  
 $a \times b$ 가 짝수이고  $c + d$ 가 홀수인 경우이다.

(i)  $a \times b$ 가 홀수이고  $c + d$ 가 짝수인 경우  
 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 는

(홀수, 홀수, 홀수, 홀수) 또는  
 (홀수, 홀수, 짝수, 짝수)이므로  
 (홀수, 홀수, 홀수, 홀수)일 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{126}$$

(홀수, 홀수, 짝수, 짝수)일 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{63}$$

$a \times b$ 가 홀수이고  $c + d$ 가 짝수일 확률은

$$\frac{5}{126} + \frac{5}{63} = \frac{5}{42}$$

(ii)  $a \times b$ 가 짝수이고  $c + d$ 가 홀수인 경우

순서쌍  $(a, b, c, d)$ 는  
 (홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는  
 (홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는  
 (짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는  
 (짝수, 홀수, 짝수, 홀수) 또는  
 (짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는  
 (짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로  
 (홀수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{63}$$

(홀수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{63}$$

(짝수, 홀수, 홀수, 짝수)일 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{63}$$

(짝수, 홀수, 짝수, 홀수)일 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{63}$$

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{126}$$

(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{126}$$

$a \times b$ 가 짝수이고  $c + d$ 가 홀수일 확률은

$$\frac{5}{63} \times 4 + \frac{5}{126} \times 2 = \frac{20}{63} + \frac{5}{63} = \frac{25}{63}$$

(i), (ii)에 의하여

$$P(A) = \frac{5}{42} + \frac{25}{63} = \frac{65}{126}$$

$a \times b + c + d$ 가 홀수이고, 두 수  $a, b$ 가 모두  
 홀수일 확률은 (i)에 의하여

$$P(A \cap B) = \frac{5}{42}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{5}{42}}{\frac{65}{126}} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$a \times b + c + d$ 가 홀수인 사건을  $A$ ,  
 두 수  $a, b$ 가 모두 홀수인 사건을  $B$ 라 하자.  
 네 수  $a, b, c, d$ 가 모두 짝수이면  
 조건을 만족시키지 않는다.  
 그러므로 네 수  $a, b, c, d$  중 홀수의 개수는  
 1 이상이다.

(i) 홀수의 개수가 1인 경우  
 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 는

( 짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는  
( 짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로  

$$2 \times \frac{{}_5P_1 \times {}_4P_3}{{}_9P_4} = \frac{5}{63}$$
(ii) 홀수의 개수가 2 인 경우  
 순서쌍  $(a, b, c, d)$  는  
 ( 홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는  
 ( 홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는  
 ( 홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는  
 ( 짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는  
 ( 짝수, 홀수, 짝수, 홀수)이므로  

$$5 \times \frac{{}_5P_2 \times {}_4P_2}{{}_9P_4} = \frac{25}{63}$$
(iii) 홀수의 개수가 3 인 경우  
 조건을 만족시키지 않는다.  
(iv) 홀수의 개수가 4 인 경우  
 순서쌍  $(a, b, c, d)$  는  
 ( 홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로  

$$\frac{{}_5P_4}{{}_9P_4} = \frac{5}{126}$$
( i )~(iv)에 의하여  

$$P(A) = \frac{5}{63} + \frac{25}{63} + \frac{5}{126} = \frac{65}{126}$$
 $a \times b + c + d$ 가 홀수이고, 두 수  $a, b$ 가 모두  
 홀수인 경우는 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 가  
 ( 홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는  
 ( 홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로  
 (ii), (iv)에 의하여  

$$P(A \cap B) = \frac{5}{63} + \frac{5}{126} = \frac{5}{42}$$
 따라서  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$   

$$= \frac{\frac{5}{42}}{\frac{65}{126}} = \frac{3}{13}$$

29. [출제의도] 정규분포의 표준화를 활용하여  
추론하기

두 확률변수  $X, Y$ 가 정규분포를 따르므로  
 $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  
 $P(X \leq 0) = P(Z \leq -m)$

$$P(Y \leq 0) = P\left(Z \leq \frac{-(m^2 + 2m + 16)}{\sigma}\right)$$

$P(X \leq 0) = P(Y \leq 0)$ 에서

$$-m = \frac{-(m^2 + 2m + 16)}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{m^2 + 2m + 16}{m} = m + 2 + \frac{16}{m}$$

$$m > 0, \frac{16}{m} > 0 \text{ 이므로}$$

절대부등식의 성질에 의하여

$$\sigma \geq 2 + 2\sqrt{m \times \frac{16}{m}} = 10$$

$$m = \frac{16}{m} \text{ 일 때, } \sigma \text{의 값이 최소이므로}$$

$$m_1 = 4$$

$m = 4$  일 때, 두 확률변수  $X, Y$ 는 각각

정규분포  $N(4, 1^2), N(40, 10^2)$ 을 따르므로

$$P(X \geq 1) = P\left(Z \geq \frac{1-4}{1}\right)$$

$$= P(Z \geq -3)$$

$$P(Y \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$P(X \geq 1) = P(Y \leq k) \text{에서}$$

$$P(Z \geq -3) = P\left(Z \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$= P\left(Z \geq -\frac{k-40}{10}\right)$$

$$-3 = -\frac{k-40}{10}$$
 따라서  $k = 70$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제  
해결하기

조건 (가)에 의하여

$$0 \leq f(2) - f(1) \leq f(3) \leq f(4)$$

조건 (나)에 의하여

$f(1) + f(2)$ 가 짝수이므로 두 수  $f(1)$ 과  $f(2)$ 는

모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

$f(2) - f(1)$ 은 0 또는 2 또는 4

( i )  $f(2) - f(1) = 0$ 인 경우

순서쌍  $(f(1), f(2))$ 는

(1, 1) 또는 (2, 2) 또는 (3, 3) 또는

(4, 4) 또는 (5, 5) 또는 (6, 6)

$0 \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로

순서쌍  $(f(3), f(4))$ 의 개수는

$${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$$

그러므로  $6 \times 21 = 126$

( ii )  $f(2) - f(1) = 2$ 인 경우

순서쌍  $(f(1), f(2))$ 는

(1, 3) 또는 (2, 4) 또는

(3, 5) 또는 (4, 6)

$2 \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로

순서쌍  $(f(3), f(4))$ 의 개수는

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

그러므로  $4 \times 15 = 60$

( iii )  $f(2) - f(1) = 4$ 인 경우

순서쌍  $(f(1), f(2))$ 는

(1, 5) 또는 (2, 6)

$4 \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로

순서쌍  $(f(3), f(4))$ 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

그러므로  $2 \times 6 = 12$

따라서 ( i ), ( ii ), ( iii)에 의하여

$$126 + 60 + 12 = 198$$

미적분 정답

|    |   |    |    |    |     |    |   |    |   |
|----|---|----|----|----|-----|----|---|----|---|
| 23 | ③ | 24 | ①  | 25 | ②   | 26 | ④ | 27 | ③ |
| 28 | ② | 29 | 12 | 30 | 144 |    |   |    |   |

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5^{2x} - 1}{2x} \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{2x}{3x} \right)$$

$$= (\ln 5) \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \ln 5$$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$$x = 3t - \frac{1}{t}, \quad y = te^{t-1}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 + \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = e^{t-1} + te^{t-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{t-1} + te^{t-1}}{3 + \frac{1}{t^2}} = \frac{(t^2 + t^3)e^{t-1}}{3t^2 + 1}$$

따라서  $t = 1$  일 때,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$b_n = a_n \times (\sqrt{n^2 + 4} - n) \text{ 이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6 \text{ 이고}$$

$$a_n = \frac{b_n}{\sqrt{n^2 + 4} - n} = \frac{b_n}{4} (\sqrt{n^2 + 4} + n) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 6n^2}{na_n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_n}{2} (\sqrt{n^2 + 4} + n) + 6n^2}{\frac{nb_n}{4} (\sqrt{n^2 + 4} + n) + 5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_n}{2} \times \frac{\sqrt{n^2 + 4} + n}{n^2} + 6}{\frac{b_n}{4} \times \frac{\sqrt{n^2 + 4} + n}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{\frac{6}{2} \times 0 + 6}{\frac{6}{4} \times 2 + 0} = \frac{6}{3} = 2$$

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$$\angle EAB = \alpha, \quad \angle CDB = \beta,$$

$$\overline{BE} = x \left( 0 < x < \frac{1}{2} \right) \text{ 이라 하면}$$

$$\overline{AD} = 2x, \quad \overline{DB} = 1 - 2x$$

$$\tan \alpha = x, \quad \tan \beta = \frac{1}{1 - 2x}$$

$$\tan(\angle CFE) = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \times \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 - 2x} - x}{1 + \frac{1}{1 - 2x} \times x}$$

$$= \frac{1 - x(1 - 2x)}{(1 - 2x) + x}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x} = \frac{16}{15}$$

$$15(2x^2 - x + 1) = 16(1 - x)$$

$$30x^2 + x - 1 = 0$$

$$(5x + 1)(6x - 1) = 0$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 이므로 } x = \frac{1}{6}$$

따라서  $\tan(\angle CDB) = \frac{1}{1 - 2x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

27. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$Q(t, 0), R(0, 2\ln(t+1)) \text{ 이므로}$$

$$\text{직사각형 OQPR의 넓이는 } f(t) = 2t \ln(t+1)$$

따라서

$$\int_1^3 f(t) dt$$

$$= \int_1^3 \{2t \ln(t+1)\} dt$$

$$= [t^2 \ln(t+1)]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{t+1} dt$$

$$= [t^2 \ln(t+1)]_1^3 - \int_1^3 \left( t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= [t^2 \ln(t+1)]_1^3 - \left[ \frac{1}{2} t^2 - t + \ln(t+1) \right]_1^3$$

$$= (9 \ln 4 - \ln 2) - \left( \frac{9}{2} - 3 + \ln 4 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right)$$

$$= -2 + 16 \ln 2$$

28. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여  $h(0) = \frac{g(0) - k}{0 - k} = 1$

$$g(0) = 0, \quad f(0) = 0$$

조건 (나)에 의하여

함수  $h(x)$  는  $x = k$  에서 연속이므로

$$h(k) = \lim_{x \rightarrow k} h(x) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - k}{x - k}$$

$$g(k) = k, \quad f(k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - k}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{x - k} = \frac{1}{3}$$

$$g'(k) = \frac{1}{3}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(k) = \frac{1}{f'(g(k))} = \frac{1}{f'(k)} = \frac{1}{3}$$

$$f'(k) = 3$$

$$f(0) = 0, \quad f(k) = k \text{ 이고 최고차항의 계수가 1 인}$$

삼차함수  $f(x)$  는

$$f(x) - x = x(x - k)(x - t) \quad (t \text{ 는 상수})$$

$$f(x) = x(x - k)(x - t) + x$$

$$f(x) = x^3 - (k + t)x^2 + (tk + 1)x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(k + t)x + tk + 1$$

$$f'(k) = 3 \text{ 이므로 } k^2 - tk - 2 = 0$$

$$t = k - \frac{2}{k} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

역함수가 존재하는 삼차함수  $f(x)$  는 모든 실수  $x$  에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 - 2(k + t)x + tk + 1 \geq 0$$

$x$  에 대한 이차방정식

$$3x^2 - 2(k + t)x + tk + 1 = 0 \text{ 의 판별식을}$$

$D$  라 하면

$$D = 4(k + t)^2 - 12(tk + 1) \leq 0$$

$$\textcircled{1} \text{ 을 대입하여 정리하면 } k^2 - 5 + \frac{4}{k^2} \leq 0 \text{ 이고}$$

$$k > 0 \text{ 이므로 양변에 } k^2 \text{ 을 곱하면}$$

$$k^4 - 5k^2 + 4 \leq 0$$

$$(k^2 - 1)(k^2 - 4) \leq 0$$

$$(k - 1)(k + 1)(k - 2)(k + 2) \leq 0$$

$$k + 1 > 0, \quad k + 2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$(k - 1)(k - 2) \leq 0$$

$$1 \leq k \leq 2$$

$$f'(0) = tk + 1 = k^2 - 1 \text{ 이므로}$$

$$k = 2 \text{ 일 때, } f'(0) \text{ 의 값이 최대이다.}$$

$$\text{그러므로 } \alpha = 2 \text{ 이고 이때 } t = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - 2}{x - 2} & (x \neq 2) \\ \frac{1}{3} & (x = 2) \end{cases}$$

이다.

$$h(9) = \frac{g(9) - 2}{9 - 2} \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

$$g(9) = p \text{ 라 할 때, } f(p) = 9 \text{ 이므로}$$

$$p^3 - 3p^2 + 3p = 9$$

$$p^3 - 3p^2 + 3p - 9 = 0$$

$$(p - 3)(p^2 + 3) = 0$$

$$p = 3 \text{ 이므로 } g(9) = 3$$

$$\textcircled{3} \text{ 에 대입하여 정리하면 } h(9) = \frac{1}{7}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(9) = \frac{1}{f'(g(9))} = \frac{1}{f'(3)}$$

$$\textcircled{2} \text{ 에 의하여 } f'(3) = 12 \text{ 이므로}$$

$$g'(9) = \frac{1}{12}$$

따라서

$$\alpha \times h(9) \times g'(9) = 2 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{42}$$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열  $\{a_n\}$  의 공비를  $r$  이라 하면

$$a_1 = 1 \text{ 이므로 } a_n = r^{n-1} \text{ (단, } n \text{ 은 자연수)}$$

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 이 수렴하므로}$$

$$-1 < r < 0 \quad \text{또는} \quad 0 < r < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) = 0 \text{ 에서}$$

$$0 < r < 1 \text{ 이면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) > 0 \text{ 이므로}$$

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } -1 < r < 0$$

$\{a_{2n}\}$  은 공비가  $r^2$  인 등비수열이고

$\{|a_{3n-1}|\}$  은 공비가  $-r^3$  인 등비수열이다.

$0 < r^2 < 1$ ,  $-1 < -r^3 < 0$  이므로

두 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n-1}|$  은 수렴한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) \\ &= \frac{20r}{1-r^2} + \frac{21|a_2|}{1-(-r^3)} = \frac{20r}{1-r^2} + \frac{21 \times (-r)}{1+r^3} = 0 \end{aligned}$$

$$20(1-r+r^2) - 21(1-r) = 0$$

$$20r^2 + r - 1 = 0$$

$$(5r-1)(4r+1) = 0$$

$$-1 < r < 0 \text{ 이므로 } r = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$  이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$$

등비수열  $\{b_n\}$  의 공비를  $s$  라 하면

$$\frac{b_n}{a_n} = b_1 \times (-4s)^{n-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{3 \times (-1)^{n-1} + b_1 \times (-4s)^{n-1}\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^{n-1} \{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\}] \end{aligned}$$

(i)  $-1 < 4s < 1$  인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4s)^{n-1} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\} = 3$$

그러므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$  이 발산한다.

(ii)  $4s < -1$  또는  $4s > 1$  인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\} \text{ 은 발산하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} \text{ 이 발산한다.}$$

(iii)  $4s = -1$  인 경우

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{3 \times (-1)^{n-1} + b_1\} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{3 \times (-1)^{n-1}\} \text{ 은 발산하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} \text{ 이 발산한다.}$$

(iv)  $4s = 1$  인 경우

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^{n-1} \times (3 + b_1)\} \end{aligned}$$

$$b_1 = -3 \text{ 일 때,}$$

모든 자연수  $n$  에 대하여

$$\frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$$

(i)~(iv)에 의하여

$$b_1 = -3, \quad s = \frac{1}{4}$$

$$b_n = (-3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{-3}{1 - \frac{1}{4}} = -4$$

$$\text{따라서 } b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 12$$

30. [출제의도] 치환적분법을 활용하여 문제 해결하기

$$f'(x) = \ln(e^{|x|} - a)$$

조건 (가)에 의하여

$$f'\left(\ln \frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} - a\right) = 0 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \ln\left(e^{|x|} - \frac{1}{2}\right)$$

모든 실수  $x$  에 대하여  $f'(-x) = f'(x)$  이므로

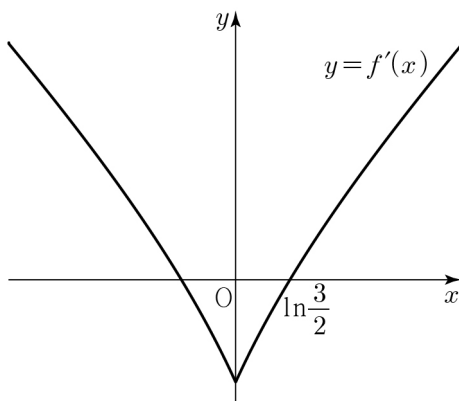
함수  $y = f'(x)$  의 그래프는  $y$  축에 대하여

대칭이고,

$$f'(0) = \ln \frac{1}{2} < 0$$

$$x > 0 \text{ 일 때, } f''(x) = \frac{e^x}{e^x - \frac{1}{2}} > 0$$

함수  $y = f'(x)$  의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수  $x$  에 대하여  $f'(-x) = f'(x)$  이므로

$$f(x) = -f(-x) + C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수})$$

$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } C = 0$$

그러므로 모든 실수  $x$  에 대하여

$$f(-x) = -f(x)$$

$x \geq 0$  에서 함수  $f(x)$  의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$      | 0                 | ...        | $\ln \frac{3}{2}$ | ...        |
|----------|-------------------|------------|-------------------|------------|
| $f'(x)$  | $\ln \frac{1}{2}$ | -          | 0                 | +          |
| $f''(x)$ |                   | +          | +                 | +          |
| $f(x)$   | 0                 | $\searrow$ | 극소                | $\nearrow$ |

함수  $f(x)$  의 극솟값을  $m$  ( $m < 0$ )이라 하면,

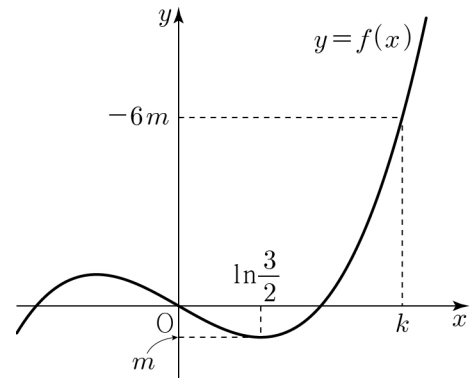
$$f\left(\ln \frac{3}{2}\right) = m$$

조건 (나)에 의하여

$$f\left(-\ln \frac{3}{2}\right) = -f\left(\ln \frac{3}{2}\right) = -m$$

$$f(k) = -6m \quad \left(k > \ln \frac{3}{2}\right)$$

함수  $y = f(x)$  의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\begin{aligned} & \int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x) - f(-k)} dx \\ &= \int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x) + f(k)} dx \\ &= \int_0^{\ln \frac{3}{2}} \frac{-f'(x)}{f(x) + f(k)} dx + \int_{\ln \frac{3}{2}}^k \frac{f'(x)}{f(x) + f(k)} dx \\ &= \int_0^{\ln \frac{3}{2}} \frac{-\{f(x) + f(k)\}'}{f(x) + f(k)} dx \\ &\quad + \int_{\ln \frac{3}{2}}^k \frac{\{f(x) + f(k)\}'}{f(x) + f(k)} dx \\ &= -\left[\ln |f(x) + f(k)|\right]_0^{\ln \frac{3}{2}} \\ &\quad + \left[\ln |f(x) + f(k)|\right]_{\ln \frac{3}{2}}^k \\ &= -\left[\ln \{f(x) + f(k)\}\right]_0^{\ln \frac{3}{2}} \\ &\quad + \left[\ln \{f(x) + f(k)\}\right]_{\ln \frac{3}{2}}^k \\ &= -\ln(m - 6m) + \ln(0 - 6m) \\ &\quad + \ln(-6m - 6m) - \ln(m - 6m) \\ &= \ln \frac{-6m}{-5m} + \ln \frac{-12m}{-5m} = \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{12}{5} = \ln \frac{72}{25} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } p = \ln \frac{72}{25}$$

$$\text{따라서 } 100 \times a \times e^p = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{72}{25} = 144$$





$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2a = \frac{5}{2}a$$

$$\angle F'PF = \frac{\pi}{2}, \overline{PF} = \frac{a}{2}, \overline{PF'} = \frac{5}{2}a \text{ 이므로}$$

$$\overline{FF'} = \frac{\sqrt{26}}{2}a \dots \textcircled{1}$$

두 점 F, F' 은

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 의 두 초점이므로}$$

$$\overline{FF'} = 2\sqrt{a^2 + 3} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{두 식 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } 26a^2 = 16a^2 + 48$$

$$\text{따라서 } a^2 = \frac{24}{5}$$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을  
활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여  $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0$  이므로

점 P 는 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위에 있고

$\overline{OP} \cdot \overline{OC} \geq 0$  이므로 점 P 의 y 좌표는

0 이상이다. 그러므로 점 P 는 곡선

$$(x-4)^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0) \text{ 위에 있다.}$$

조건 (나)에 의하여  $\overline{AB} = 4\overline{QP}$  이므로

두 벡터  $\overline{AB}$ ,  $\overline{QP}$  는 방향이 서로 같고

$$|\overline{QP}| = \frac{1}{4}|\overline{AB}| = 1 \text{ 이므로 점 Q 는 점 P 를}$$

x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점과 일치한다.

그러므로 점 Q 는 곡선

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0) \dots \textcircled{1}$$

위에 있다.

$|\overline{QA}| = 2$  이므로 점 Q 는 중심이 A 이고

반지름의 길이가 2 인 원

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \dots \textcircled{2}$$

위에 있다.

두 식  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  을 연립하면

$$Q\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), P\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$\overline{AP} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \overline{AQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 20 \times k = 90$$

[다른 풀이]

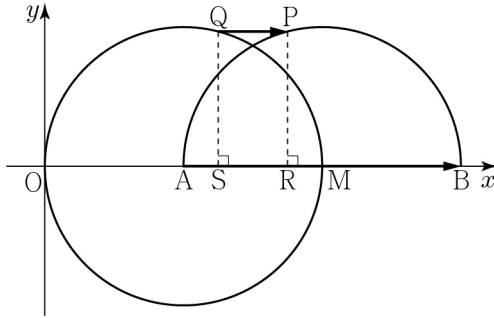
조건 (가)에 의하여 P 는 선분 AB 를 지름으로  
하는 원 위의 점 중 y 좌표가 0 이상인 점이다.

조건 (나)에 의하여  $\overline{AB} = 4\overline{QP}$  이므로

두 벡터  $\overline{AB}$ ,  $\overline{QP}$  는 방향이 서로 같고

$|\overline{QP}| = 1$  이므로 점 Q 는 점 P 를 벡터  $\overline{AB}$  의  
방향으로 -1 만큼 평행이동한 점과 일치한다.

$|\overline{QA}| = 2$  를 만족시키는 점 Q 는 중심이 A 이고  
반지름의 길이가 2 인 원 위에 있으므로 조건을  
만족시키는 두 점 P, Q 의 위치는 다음 그림과  
같다.



선분 AB 의 중점을 M 이라 하고 두 점

P, Q 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 각각

R, S 라 하면  $\overline{AS} = \overline{RM} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= (\overline{AQ} + \overline{QP}) \cdot \overline{AQ} \\ &= |\overline{AQ}|^2 + \overline{QP} \cdot \overline{AQ} \\ &= 4 + \overline{SR} \cdot \overline{AQ} \\ &= 4 + 2\overline{AS} \cdot \overline{AQ} \\ &= 4 + 2|\overline{AS}|^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 20 \times k = 90$$

30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여  
추론하기

삼각형 A'PB' 은 이등변삼각형이므로

$$\overline{A'M} = \sqrt{\overline{A'P}^2 - \overline{PM}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$\overline{AA'} \perp \alpha$ , 선분 A'M 은 평면  $\alpha$  에 포함되므로

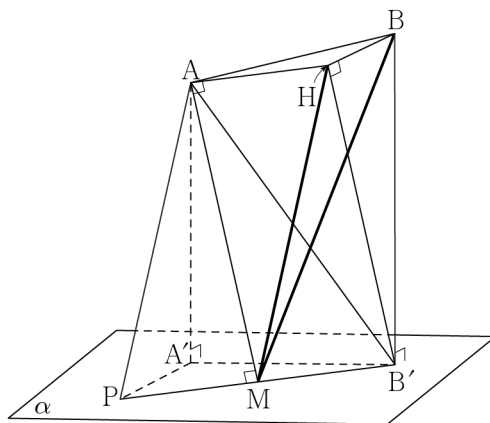
$$\overline{AA'} \perp \overline{A'M}$$

$\angle AA'M = \frac{\pi}{2}$  인 직각삼각형 AA'M 에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'M}^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$$

$\overline{AA'} \perp \alpha$ ,  $\overline{A'M} \perp \overline{PB'}$  이므로

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{AM} \perp \overline{PB'}$  ...  $\textcircled{1}$



점 B 의 평면 APB' 위로의 정사영을 점 H 라  
하면, 선분 BM 의 평면 APB' 위로의 정사영은  
 $\overline{HM}$  이다.

직각삼각형 MAB 에서  $\overline{AM} \perp \overline{AB}$

$\overline{BH} \perp$  (평면 APB') 이므로

삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AM} \perp \overline{AH} \dots \textcircled{2}$$

$\overline{BH} \perp$  (평면 APB'),  $\overline{PB'} \perp \overline{BB'}$  이므로

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{PB'} \perp \overline{HB'}$  ...  $\textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  에 의하여

사각형 AMB'H 가 직사각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{HM} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MB'}^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + 4^2} = \sqrt{106} \end{aligned}$$

두 직선 AM, HB' 은 서로 평행하고

두 직선 AA', BB' 은 서로 평행하므로

$\angle MAA' = \angle BB'H$  이고

$$\tan(\angle MAA') = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \tan(\angle BB'H)$$

$$\overline{BH} = \overline{HB'} \times \tan(\angle BB'H)$$

$$= 3\sqrt{10} \times \frac{1}{3} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BM} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{HM}^2}$$

$$= \sqrt{10 + 106} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

직선 BM 과 평면 APB' 이 이루는 예각의

크기는  $\angle BMH$  와 같으므로  $\theta = \angle BMH$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{\overline{HM}}{\overline{BM}}\right)^2 = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{106}{116} = \frac{53}{58}$$

$$p = 58, q = 53$$

$$\text{따라서 } p + q = 111$$